INECUACIONES CON RADICALES

Para raíces cuadradas, pueden plantearse las dos siguientes inecuaciones:

$\sqrt{A(x)} < n$; $\sqrt{A(x)} > n$, (también con $\le$ y $\ge$); $n \ge 0$

siendo $A(x)$ una expresión con una incógnita, que debe ser no negativa: $A(x) \ge 0$.
Si no se especifica lo contrario se tomará siempre la raíz cuadrada con el signo que lleve.

Para resolverlas puede recurrirse a elevar al cuadrado.

- La inecuación $\sqrt{A(x)} < n \Rightarrow 0 \le A(x) < n^2$.

Su solución son los valores de x que cumplen a la vez las inecuaciones: $0 \le A(x)$ y $A(x) < n^2$.

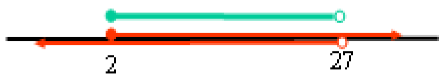
- La inecuación $\sqrt{A(x)} > n \Rightarrow A(x) > n^2$

Ejemplos:

a) $\sqrt{x} < 3 \Rightarrow 0 \le x < 9$.
La condición $x \ge 0$ es imprescindible para que exista la raíz cuadrada.

b) $\sqrt{x-2} \ge 5 \Rightarrow x - 2 \ge 25 \Rightarrow x \ge 27$.

c) $\sqrt{x-2} < 5 \Rightarrow 0 \le x - 2 < 25$. Inecuaciones: $0 \le x-2$ y $x - 2 < 25$.
Las soluciones de $0 \le x - 2$ son los valores de $x \ge 2$.
Las soluciones de $x - 2 < 25$, son los valores de $x < 27$.



Las soluciones de $\sqrt{x-2} < 5$ son los valores de $x \in [2, 27)$, intervalo intersección de los anteriores.

d) $\sqrt{x^2 - 3x} \le 2 \Rightarrow 0 \le x^2 - 3x \le 4$. Inecuaciones: $0 \le x^2 - 3x$ y $x^2 - 3x - 4 \le 0$.
Las soluciones de $0 \le x^2 - 3x \Leftrightarrow 0 \le x(x-3)$ son los valores de $x \in (-\infty, 0] \cup [3, +\infty)$.
Las soluciones de $x^2 - 3x - 4 \le 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-4) \le 0$ son los valores de $x \in [-1, 4]$. (Las raíces de la ecuación asociada son $x = -1$ y $x = 4$).
Por tanto, las soluciones de $\sqrt{x^2 - 3x} \le 2$ son los valores de $x \in [-1, 0] \cup [3, 4]$, que son los comunes a ambas inecuaciones.

<u>ADVERTENCIAS</u>:

1) Si intervienen otros términos se procederá utilizando los criterios generales de transformación de expresiones con radicales.

Ejemplo:

La inecuación $\sqrt{x^2 - 1} + x > 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 1} > 1 - x$, cuya solución se obtiene como sigue:

$\sqrt{x^2 - 1} > 1 - x \Rightarrow x^2 - 1 > (1-x)^2 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 1 - 2x + x^2 \Leftrightarrow 2x > 2 \Rightarrow x > 1$.

Su solución son los valores de $x > 1$.
(Puede observarse que si $x > 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 1} > 0$, mientras que $1 - x < 0$).

2) Al elevar al cuadrado una desigualdad se pueden introducir errores y ganar o perder soluciones. Siempre hay que asegurarse que $A(x) \ge 0$ en el intervalo de soluciones, pues en caso contrario no estaría definida la expresión $\sqrt{A(x)}$. Por tanto es necesario comprobar los resultados.

Ejemplo:
Para resolver $x-\sqrt{x}<6$, lo normal es hacer lo siguiente:

$$x-\sqrt{x}<6 \Rightarrow x-6<\sqrt{x} \Rightarrow (x-6)^2<\left(\sqrt{x}\right)^2 \Rightarrow x^2-12x+36<x \Rightarrow x^2-13x+36<0$$

$\Rightarrow 4<x<9 \rightarrow$ (Los valores 4 y 9 son las soluciones de $x^2-13x+36=0$).
Sin embargo, la inecuación dada admite otras soluciones, por ejemplo $x = 4$. ¿Qué ha sucedido para que no salga esa solución? El error se ha generado al hacer el cuadrado.

→ Véase ahora otra posibilidad:

$x-\sqrt{x}<6 \Rightarrow x-\sqrt{x}-6<0 \Rightarrow$ (haciendo el cambio $\sqrt{x}=t$) $\Rightarrow t^2-t-6<0$.

Se resuelve la ecuación $t^2-t-6=0$, cuyas soluciones son: $\sqrt{x}=t=3$ y $\sqrt{x}=t=-2$. Si se considera sólo el signo positivo de la raíz, que es lo habitual, y se observa que la x no puede tomar valores negativos, la solución es:

$0\le\sqrt{x}=t<3 \Rightarrow 0\le x<9$, que es la solución correcta.

3) También habrá que tener en cuenta si el signo + o – de la raíz puede afectar al resultado. Como consecuencia de esto, una vez resuelta la inecuación conviene comprobar los resultados.
Ejemplo:
De $-\sqrt{x}<3$ podría deducirse que $0\le\left(-\sqrt{x}\right)^2<3^2 \Rightarrow 0\le x<9$. El resultado no es falso, pero es incompleto, pues la desigualdad se cumple siempre que $x \ge 0$.

Pequeños retos
Resuelve las siguientes inecuaciones:
a) $\sqrt{2x+1}\ge 3$ b) $\sqrt{x-1}<4$ c) $\sqrt{x^2+9}<5$

Solución:
a) $x \ge 4$. b) $x \in [1, 17)$. c) $x \in (-4, 4)$.