INECUACIONES RACIONALES

Su planteamiento más sencillo es $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$ o $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$.

Para resolverlas hay que analizar los signos del numerador y denominador para determinar el signo del cociente. Para ello hay que descomponer en factores ambos términos.

Es útil marcar las raíces del numerador y del denominador sobre la recta real y estudiar el signo del cociente en los distintos intervalos que se forman.

Las soluciones de $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$ excluyen las de $P(x) = 0$. En las de $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$ se incluyen las de $P(x) = 0$. Siempre se excluyen las raíces de $Q(x) = 0$.

- Si se presentan en la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} < k$ o $\frac{P(x)}{Q(x)} < A(x)$, hay que transformarlas hasta expresarlas en

la forma inicial más sencilla. Así:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} < k \Leftrightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} - k < 0 \Leftrightarrow \frac{P(x) - kQ(x)}{Q(x)} < 0$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} < A(x) \Leftrightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} - A(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{P(x) - A(x) \cdot Q(x)}{Q(x)} < 0$$

Ejemplos:

a) Para resolver la inecuación $\frac{x-5}{x+2} < 0$:

1) Se resuelven las ecuaciones $x - 5 = 0$ ($\to x = 5$) y $x + 2 = 0$ ($\to x = -2$).

Se marcan ambas soluciones en la recta; determinan los intervalos:

$(-\infty, -2)$; $(-2, 5)$; $(5, +\infty)$.

2) Se estudia el signo del numerador y denominador en cada intervalo:

- Si $x < -2$, tanto el numerador como el denominador son negativos → cociente positivo.
- Si $-2 < x < 5$, el numerador es positivo y el denominador negativo → cociente negativo.
- Si $x > 5$, el numerador y el denominador son positivos → cociente positivo.

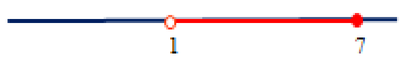
3) Por tanto, el intervalo solución de la inecuación dada es $(-2, 5)$.

<u>Consecuencia</u>: las soluciones de $\frac{x-5}{x+2} \geq 0$ son los valores de $x \in (-\infty, -2) \cup [5, +\infty)$.

b) Para resolver la inecuación $3 \leq \frac{2x+4}{x-1}$:

1) Se transforma: $3 \leq \frac{2x+4}{x-1} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{2x+4}{x-1} - 3 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{7-x}{x-1}$.

2) Se procede como en el ejemplo a). Hay que considerar los intervalos: $(-\infty, 1)$, $(1, 7)$ y $(7, +\infty)$.



- Si $x < 1$, el numerador es positivo y el denominador negativo → cociente negativo.
- Si $1 < x < 7$, el numerador y el denominador son positivos → cociente positivo.
- Si $x > 7$, el numerador es negativo y el denominador positivo → cociente negativo.

Por tanto, la solución es el intervalo $(1, 7]$.

c) Para resolver la inecuación $x-1<\dfrac{6}{x-2}$:

1) Se transforma la inecuación dada:

$$x-1<\frac{6}{x-2} \Leftrightarrow x-1-\frac{6}{x-2}<0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)\cdot(x-2)-6}{x-2}<0 \Leftrightarrow \frac{x^2-3x-4}{x-2}<0$$

2) Se resuelven las ecuaciones $x^2-3x-4=0$ ($\to x=-1$ y 4) y $x-2=0$ ($\to x=2$).

En definitiva queda: $x-1<\dfrac{6}{x-2} \Leftrightarrow \dfrac{x^2-3x-4}{x-2}<0 \Leftrightarrow \dfrac{(x+1)\cdot(x-4)}{x-2}<0$.

Se marcan todas las soluciones en la recta; determinan los intervalos:

$(-\infty,-1)$; $(-1, 2)$; $(2, 4)$; $(4, +\infty)$.

3) Se estudia el signo del numerador y denominador en cada intervalo:

- Si $x<-1$, el numerador es positivo y el denominador negativo $\to$ cociente negativo.
- Si $-1<x<2$, tanto el numerador como el denominador son negativos $\to$ cociente positivo.
- Si $2<x<4$, el numerador es negativo y el denominador positivo $\to$ cociente negativo.
- Si $x>4$, el numerador y el denominador son positivos $\to$ cociente positivo.

Por tanto, la solución viene dada por los valores de $x \in (-\infty,-1) \cup (2, 4)$.

Observaciones:

Son errores frecuentes establecer las secuencias:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}<0 \Rightarrow P(x)<0\,; \qquad \frac{P(x)}{Q(x)}<k \Rightarrow P(x)<kQ(x).$$

En ambos casos se ignoran los signos que toma el denominador.

$\to$ Así, en el ejemplo b) de arriba es erróneo lo siguiente:

$3\le\dfrac{2x+4}{x-1} \Rightarrow 3(x-1)\le 2x+4 \Rightarrow 3x-3\le 2x+4 \Rightarrow x\le 7$. Compárese con la solución correcta.

$\to$ Por lo mismo, también sería incorrecto si en el ejemplo c) se hace:

$x-1<\dfrac{6}{x-2} \Rightarrow (x-1)(x-2)<6 \Rightarrow x^2-3x-4<0$ ($\to x=-1$ y 4) $\Rightarrow (x+1)(x-4)<0$, cuya solución es $x \in (-1, 4)$, que es distinta de la correcta: $x \in (-\infty,-1) \cup (2, 4)$.

Pequeños retos

Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $\dfrac{x-1}{x+2}>0$ b) $\dfrac{x-3}{x^2}\ge 0$ c) $\dfrac{x+6}{x+2}-x\le 0$

Solución:

a) $x \in (-\infty,-2) \cup (1, +\infty)$. b) $x>3$. c) $x \in (-\infty,-3) \cup (-2, 2)$.