INECUACIONES DE TERCER GRADO

Para resolver una inecuación de la forma $P(x) < 0$ o $P(x) > 0$, donde $P(x)$ es un polinomio de grado 3 o mayor, se procede como sigue:

1) Descomponer $P(x)$ en factores; para ello habrá que hallar las raíces de $P(x) = 0$.
Si estas raíces fuesen x_1, x_2, x_3, supuesto $P(x)$ de tercer grado, se tendría:

$$P(x) < 0 \Leftrightarrow ax^3 + bx^2 + cx + d < 0 \Leftrightarrow a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) < 0$$

2) Representar las raíces sobre la recta y determinar los intervalos que se obtienen.
Si las raíces, x_1, x_2, x_3, están ordenadas de menor a mayor, esos intervalos son:

$(-\infty, x_1)$; (x_1, x_2); (x_2, x_3); $(x_3, +\infty)$

3) Estudiar el signo de $a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) < 0$ en cada uno de esos intervalos. Para ellos basta con probar para un valor de cada uno de los intervalos.

4) Dar los intervalos solución.

Ejemplos:

a) Para resolver la inecuación $x^3 - 4x^2 - 5x < 0$:

1) Se resuelve la ecuación $x^3 - 4x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4x - 5) = x(x+1)(x-5) = 0$.
Con esto:

$x^3 - 4x^2 - 5x < 0 \Leftrightarrow x(x+1)(x-5) < 0$.

2) Se representan las raíces $x = -1$, $x = 0$ y $x = 5$.
Se obtienen los intervalos:

$x < -1$, $-1 < x < 0$, $0 < x < 5$, $x > 5$

3) Los signos de los factores de $x(x+1)(x-5)$ son, respectivamente:

$(-)(-)(-) \to (-)$ $(-)(+)(-) \to (+)$ $(+)(+)(-) \to (-)$ $(+)(+)(+) \to (+)$

4) En consecuencia, las soluciones de la inecuación son: $x < -1$ o $0 < x < 5$.

b) Para resolver la inecuación $(x+2)(x^2 - 5x) \geq 0$:

1) Se continua la descomposición factorial: $(x+2)(x^2 - 4x) = 0 \Leftrightarrow (x+2)\cdot(x-4)\cdot x = 0$.
Con esto:

$(x+2)(x^2 - 4x) \geq 0 \Leftrightarrow (x+2)\cdot(x-4)\cdot x \geq 0$.

2) Se representan las raíces $x = -2$, $x = 0$ y $x = 4$.
Se obtienen los intervalos:

$x < -2$, $-2 < x < 0$, $0 < x < 4$, $x > 4$

3) Los signos de los factores de $(x+2)\cdot(x-5)\cdot x$ son, respectivamente:

$(-)(-)(-) \to (-)$ $(+)(-)(-) \to (+)$ $(+)(-)(+) \to (-)$ $(+)(+)(+) \to (+)$

4) En consecuencia, las soluciones de la inecuación son: $-2 < x < 0$ o $x > 4$.

Pequeños retos

Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $(x+3)(x^2 - 4) \leq 0$ b) $(x-1)(1 + x^2) > 0$ c) $(x-1)(x-3)(x-5) < 0$

Solución:

a) $x \in (-\infty, -3) \cup (-2, 2)$. b) $x > 1$. c) $x \in (-\infty, 1) \cup (3, 5)$.