

## INECUACIONES DE TERCER GRADO

Para resolver una inecuación de la forma  $P(x) < 0$  o  $P(x) > 0$ , donde  $P(x)$  es un polinomio de grado 3 o mayor, se procede como sigue:

1) Descomponer  $P(x)$  en factores; para ello habrá que hallar las raíces de  $P(x) = 0$ .

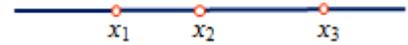
Si estas raíces fuesen  $x_1, x_2, x_3$ , supuesto  $P(x)$  de tercer grado, se tendría:

$$P(x) < 0 \Leftrightarrow ax^3 + bx^2 + cx + d < 0 \Leftrightarrow a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) < 0$$

2) Representar las raíces sobre la recta y determinar los intervalos que se obtienen.

Si las raíces,  $x_1, x_2, x_3$ , están ordenadas de menor a mayor, esos intervalos son:

$$(-\infty, x_1); \quad (x_1, x_2); \quad (x_2, x_3); \quad (x_3, +\infty)$$



3) Estudiar el signo de  $a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) < 0$  en cada uno de esos intervalos. Para ellos basta con probar para un valor de cada uno de los intervalos.

4) Dar los intervalos solución.

### Ejemplos:

a) Para resolver la inecuación  $x^3 - 4x^2 - 5x < 0$ :

1) Se resuelve la ecuación  $x^3 - 4x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4x - 5) = x(x + 1)(x - 5) = 0$ .

Con esto:

$$x^3 - 4x^2 - 5x < 0 \Leftrightarrow x(x + 1)(x - 5) < 0.$$

2) Se representan las raíces  $x = -1, x = 0$  y  $x = 5$ .

Se obtienen los intervalos:

$$x < -1, \quad -1 < x < 0, \quad 0 < x < 5, \quad x > 5$$

3) Los signos de los factores de  $x(x + 1)(x - 5)$  son, respectivamente:

$$(-)(-)(-) \rightarrow (-) \quad (-)(+)(-) \rightarrow (+) \quad (+)(+)(-) \rightarrow (-) \quad (+)(+)(+) \rightarrow (+)$$

4) En consecuencia, las soluciones de la inecuación son:  $x < -1$  o  $0 < x < 5$ .



b) Para resolver la inecuación  $(x + 2)(x^2 - 5x) \geq 0$ :

1) Se continua la descomposición factorial:  $(x + 2)(x^2 - 4x) = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 4)x = 0$ .

Con esto:

$$(x + 2)(x^2 - 4x) \geq 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 4)x \geq 0.$$

2) Se representan las raíces  $x = -2, x = 0$  y  $x = 4$ .

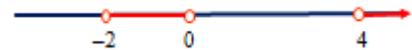
Se obtienen los intervalos:

$$x < -2, \quad -2 < x < 0, \quad 0 < x < 4, \quad x > 4$$

3) Los signos de los factores de  $(x + 2)(x - 4)x$  son, respectivamente:

$$(-)(-)(-) \rightarrow (-) \quad (+)(-)(-) \rightarrow (+) \quad (+)(-)(+) \rightarrow (-) \quad (+)(+)(+) \rightarrow (+)$$

4) En consecuencia, las soluciones de la inecuación son:  $-2 < x < 0$  o  $x > 4$ .



### Pequeños retos

Resuelve las siguientes inecuaciones:

a)  $(x + 3)(x^2 - 4) \leq 0$       b)  $(x - 1)(1 + x^2) > 0$       c)  $(x - 1)(x - 3)(x - 5) < 0$

**Solución:**

a)  $x \in (-\infty, -3) \cup (-2, 2)$ . b)  $x > 1$ . c)  $x \in (-\infty, 1) \cup (3, 5)$ .