INECUACIONES DE PRIMER Y SEGUNDO GRADO

Inecuaciones de primer grado

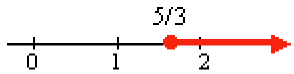
Son de la forma $ax + b < c$. El signo < puede sustituirse por >, ≤ o ≥.
Para resolverlas se utilizan las reglas de transformación de desigualdades. Además, en todos los casos se tendrá en cuenta el orden de prioridad de las operaciones.

Ejemplos:

a) Para resolver $2(x-1)+7 \le 5(x-3)+15$, se resuelven los paréntesis y se trasponen términos. Así:

$$2(x-1)+7 \le 5(x-3)+15 \Leftrightarrow 2x-2+7 \le 5x-15+15 \Leftrightarrow 2x+5 \le 5x \Leftrightarrow 5 \le 3x \Leftrightarrow \frac{5}{3} \le x.$$

Las soluciones son los puntos del intervalo [5/3, ∞).



b) Para resolver $\dfrac{x-2}{3} < \dfrac{2x-4}{5}$:

1) Se multiplican ambos miembros por 15: $5(x-2) < 3(2x-4)$
2) Se operan los paréntesis: $5x-10 < 6x-12$
3) Se trasponen y agrupan términos: $5x-6x < -12+10 \Rightarrow -x < -2$
4) Multiplicando por –1: $x > 2$

Inecuaciones de segundo grado

Son de la forma $ax^2 + bx + c \le 0$ con $a \ne 0$. El signo ≤ puede sustituirse por <, > o ≥.
Para obtener la solución, conviene resolver la ecuación de segundo grado asociada $ax^2 + bx + c = 0$ y escribir el trinomio $ax^2 + bx + c$ como producto de factores.
Dependiendo de las raíces de esa ecuación, podrá escribirse:

- $ax^2 + bx + c \le 0 \Leftrightarrow a(x-x_1)(x-x_2) \le 0$, si hay dos soluciones distintas x_1 y x_2.
- $ax^2 + bx + c \le 0 \Leftrightarrow a(x-x_1)^2 \le 0$, si sólo hay una solución, x_1.
- Si no hay soluciones reales, la inecuación no puede descomponerse en factores; y viceversa.

En cada caso, estudiando los signos de los factores se encuentran los intervalos solución. Para determinar esos signos es útil representar las raíces sobre la recta real y probar con un número perteneciente a cada intervalo.

Ejemplos:

a) Resolución de $2x^2 + 4x - 6 < 0$.

1) Se resuelve $2x^2 + 4x - 6 = 0 \to x_1 = -3$ y $x_2 = 1 \Rightarrow 2x^2 + 4x - 6 = 2(x+3)(x-1)$.

2) En consecuencia: $2x^2 + 4x - 6 < 0 \Leftrightarrow 2(x+3)(x-1) < 0$.

3) Como el primer factor, 2, es positivo, el signo del producto dependerá del signo de cada uno de los otros dos factores: $(x + 3)$ y $(x - 1)$.

$(+)\cdot(-) \to (x+3>0)\cdot(x-1<0) \to (x>-3)$ y $(x<1) \Rightarrow -3 < x < 1$

$(-)\cdot(+) \to (x+3<0)\cdot(x-1>0) \to (x<-3)$ y $(x>1) \Rightarrow$ No hay valores comunes.

b) Resolución de $x^2 + 4x + 4 \le 0$.

1) Se resuelve la ecuación $x^2 + 4x + 4 = 0 \to x = -2$, doble $\Rightarrow x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$

2) $x^2 + 4x + 4 \le 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 \le 0$.

3) Como un cuadrado nunca es negativo, la inecuación planteada sólo es cierta para $x = -2$, que verifica la igualdad.

Consecuencia: la inecuación $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2 \geq 0$, se cumple para cualquier número real *x*.

c) Resolución de la inecuación $-x^2 + 4x - 6 < 0$.

1) Como $-x^2 + 4x - 6 = 0$ no tiene soluciones reales, sólo hay dos posibilidades para el valor de $-x^2 + 4x - 6$: o siempre es mayor que cero; o siempre es menor que cero.

2) Como para $x = 0$ vale –6, se deduce que siempre será negativa. Esto es, $-x^2 + 4x - 6 < 0$ es cierta para todo valor de *x*.

Consecuencia: $-x^2 + 4x - 6 > 0$ no tiene solución.

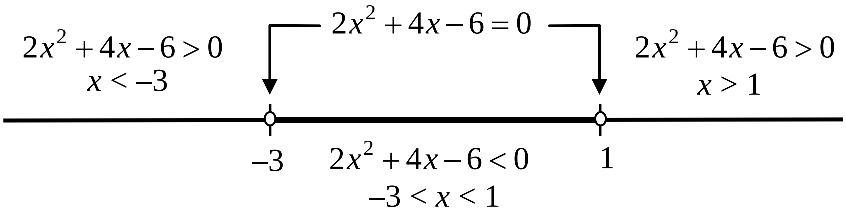
<u>Observaciones:</u>

1) Cuando se resuelve una ecuación de segundo grado, $ax^2 + bx + c = 0$, se hallan los valores de *x* que hacen que la expresión $ax^2 + bx + c$ valga 0. En consecuencia, en los demás valores de *x* dicha expresión será mayor que 0 o será menor que 0.

Así, por ejemplo, $2x^2 + 4x - 6 = 0$ cuando $x = -3$ o $x = 1$.

En consecuencia, si $x < -3$, si $-3 < x < 1$, o si $x > 1$, $2x^2 + 4x - 6 \neq 0$: será mayor o menor que 0.

Gráficamente, la situación es la siguiente:



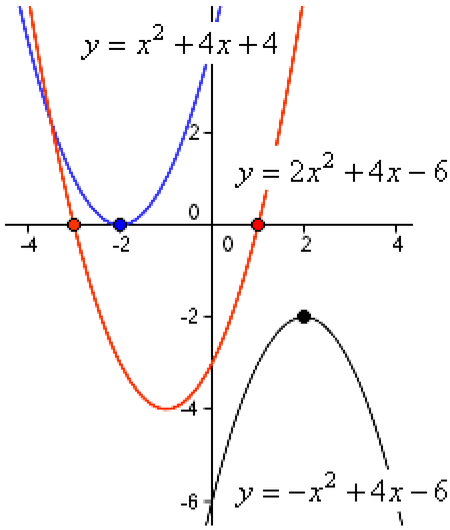
2) <u>Interpretación geométrica de las soluciones de inecuaciones de segundo grado</u>

Puede ser oportuno recordar que la función $y = ax^2 + bx + c$ es una parábola. En particular:

a) Si se representa gráficamente $y = 2x^2 + 4x - 6$ se observa que su curva:

→ Corta al eje *OX* en los puntos $x = -3$ y $x = 1$, que son las soluciones de la ecuación $2x^2 + 4x - 6 = 0$;

→ Está por debajo del eje *OX* en el intervalo (–3, 1), precisamente las soluciones de $2x^2 + 4x - 6 < 0$.



b) Igualmente, la parábola $y = x^2 + 4x + 4$ tiene su vértice (su mínimo) en el punto (–2, 0), de abscisa $x = -2$; para los demás valores de *x* siempre está por encima del eje *OX*. Por eso, $x^2 + 4x + 4 \leq 0$ sólo es cierto si $x = -2$

c) Para el caso $-x^2 + 4x - 6 < 0$, como la gráfica de la parábola $y = -x^2 + 4x - 6$ queda por debajo del eje *OX* para cualquier valor de *x*, su solución es todo **R**.

Pequeños retos

1. Halla el intervalo solución de las siguientes inecuaciones:

a) $-x + 2 < 3$ b) $\dfrac{x-1}{2} \geq x + 3$ c) $2x \leq 3 + 5x$

2. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $x^2 - 3 > 0$ b) $1 - x^2 > 0$ c) $2x^2 - 6x \leq 0$

d) $(x+3)(2x-5) < 0$ e) $x^2 + 5x - 14 < 0$ f) $2x^2 - 4x + 2 \geq 0$ →→

Solución:

1. a) $-x+2<3 \to x>5$ b) $\dfrac{x-1}{2} \geq x+3 \to x \leq -7$ c) $2x \leq 3+5x \to x \geq -1$

2. a) $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$. b) $-1<x<1$. c) $0 \leq x \leq 3$. d) $-3 < x < 5/2$. e) $-7<x<2$. f) **R**