INECUACIONES: ¿QUÉ SON Y CÓMO SE RESUELVEN?

Una inecuación es una desigualdad en la que aparecen números y letras ligados mediante las operaciones algebraicas. Los signos de desigualdad son: $<$, $\leq$, $>$, $\geq$
Las inecuaciones se clasifican por su grado y por su número de incógnitas.

- Soluciones de una inecuación son los valores de la(s) incógnita(s) que cumplen la desigualdad.

En las inecuaciones con una incógnita el conjunto de soluciones suele darse mediante intervalos.
En las inecuaciones con dos incógnitas, el conjunto de soluciones suele ser una región del plano.

- Dos inecuaciones son equivalentes cuando tienen las mismas soluciones.

Ejemplos:
a) $2x-14\leq 0$ es una inecuación de primer grado. Su solución son todos los números $x \leq 7$. (Puede comprobarse sustituyendo).
b) $x^3-3x>-2$ es una inecuación de tercer grado. Una de sus soluciones es $x = 0$, pues $0 > -2$.
El número $x = -3$ no es solución, pues $(-3)^3-3\cdot(-3)=-27+9=-18$ no es mayor que -2.
c) $x-\sqrt{x}<6$ es una inecuación con raíces. Una de sus soluciones es $x = 4$.
d) $\dfrac{2}{x-3}<1$ es una inecuación racional. Los números reales mayores que 5, $x > 5$, forman parte de su conjunto de soluciones, pero tiene más. (Intenta encontrar alguna más).

- En las inecuaciones pueden aparecer expresiones polinómicas, racionales, con raíces…; esto hace que los métodos y herramientas de resolución sean variados, pero las claves son siempre las mismas.

Claves para resolver una inecuación
1) Resolver una inecuación es encontrar sus soluciones. Para resolver una inecuación hay que despejar la incógnita; para ello, generalmente, hay que transformar la inecuación inicial en otra equivalente a ella, más sencilla, de manera que despejar sea fácil.
2) Las transformaciones que pueden hacerse en una inecuación dependen de su naturaleza, pero en todos los casos hay que asegurar que la cadena de equivalencias sea cierta: cada paso debe ser posible y estar bien dado. Para ello siempre hay que tener en cuenta las reglas de transformación de desigualdades. Algunas de estas reglas son:

- Si $A < B$ entonces:

$A + n < B + n$	$A - n < B - n$
$A \cdot n < B \cdot n$, si $n > 0$	$A/n < B/n$, si $n > 0$
$A \cdot n > B \cdot n$, si $n < 0$	$A/n > B/n$, si $n < 0$

Ejemplos:
a) $3 < 5$ (multiplicando por 6) $\Rightarrow$ $18 < 30$.
b) $3 < 5$ (multiplicando por -6) $\Rightarrow$ $-18 > -30$ (se cambia $<$ por $>$)
c) $2x^2<8$ (dividiendo por 2) $\Rightarrow$ $x^2<4$.
d) $-x+1<-2x$ (multiplicando por -1) $\Rightarrow$ $-(-x+1)>2x \Leftrightarrow 2x<x-1$.

Observaciones:
1) Si se multiplica (o divide) por un número negativo, cambia el sentido de la desigualdad.
2) Si $A < B$ no puede concluirse que $A^2 < B^2$ $\rightarrow$ Contraejemplo: $-4 < 2$, pero $(-4)^2 > 2^2$.
3) Tampoco la recíproca es cierta: Si $A^2 < B^2$ no puede asegurarse que $A < B$.
4) $A < B \Leftrightarrow B > A \Leftrightarrow -A > -B \Leftrightarrow -B < -A$ $\rightarrow$ Estas equivalencias causan frecuentes problemas.

5) Decir que algo es negativo equivale a decir que es menor que 0: $x < 0$; y que algo es positivo, que es mayor que 0: $x > 0$.

Menor que 0 y mayor que 0 en productos y cocientes

Muchas veces interesa conocer sólo el signo de una expresión algebraica. Esto es, saber cuándo es menor que cero (negativa) o cuándo es mayor que cero (positiva). El mejor procedimiento, salvo en casos inmediatos, consiste en descomponer dicha expresión en factores y, después, tener en cuenta las reglas de los signos:

$(+)\cdot(-)=(-)<0$ $\quad (+)\cdot(+)=(+)>0$ $\quad (-)\cdot(+)=(-)<0$ $\quad (-)\cdot(-)=(+)>0$

$(+):(-)=(-)<0$ $\quad (+):(+)=(+)>0$ $\quad (-):(+)=(-)<0$ $\quad (-):(-)=(+)>0$

Pueden presentarse los siguientes casos:

- Producto $\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}<0 \Leftrightarrow \begin{cases}\mathrm{A}<0 \text{ y } \mathrm{B}>0, \text{ o}\\ \mathrm{A}>0 \text{ y } \mathrm{B}<0\end{cases}$ → (Un factor es positivo y otro negativo).
- Producto $\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}>0 \Leftrightarrow \begin{cases}\mathrm{A}<0 \text{ y } \mathrm{B}<0, \text{ o}\\ \mathrm{A}>0 \text{ y } \mathrm{B}>0\end{cases}$ → (Los dos factores tienen el mismo signo).

Ejemplos:

a) La expresión $2x > 0$ cuando $x > 0$. Análogamente, $2x < 0$ si $x < 0$.

b) $x^2 > 0$ para todo $x \in \mathbf{R}$. En consecuencia, $-x^2 < 0$ siempre.

c) Por lo mismo, $x^2(x-1) > 0$ cuando $x - 1 > 0$; esto es, si $x > 1$.

- Cociente $\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}<0 \Leftrightarrow \begin{cases}\mathrm{A}<0 \text{ y } \mathrm{B}>0, \text{ o}\\ \mathrm{A}>0 \text{ y } \mathrm{B}<0\end{cases}$ (Los dos términos con distinto signo).
- Cociente $\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}>0 \Leftrightarrow \begin{cases}\mathrm{A}<0 \text{ y } \mathrm{B}<0, \text{ o}\\ \mathrm{A}>0 \text{ y } \mathrm{B}>0\end{cases}$ (Los dos términos con el mismo signo).

Ejemplos:

a) El signo de la expresión $\dfrac{1}{x}$ sólo depende del denominador:

$\dfrac{1}{x} < 0$ si $x < 0$; $\quad \dfrac{1}{x} > 0$ si $x > 0$. $\quad$ Obsérvese que $\dfrac{1}{x}$ nunca vale 0.

b) La expresión $\dfrac{1}{x^2}$ siempre toma valores positivos, pues el denominador siempre es positivo. Por tanto la inecuación $\dfrac{1}{x^2} > 0$ es cierta para cualquier valor de x, excluido el 0.

c) $\dfrac{x-1}{x+2} > 0$ cuando $x - 1 > 0$ y $x + 2 > 0$ → $[(+) : (+) = (+)] \Rightarrow x > 1$.

También, cuando $x - 1 < 0$ y $x + 2 < 0$ → $[(-) : (-) = (+)] \Rightarrow x < -2$

$\dfrac{x^2-1}{(x+2)^2} = 0$ si $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$; $\quad \dfrac{x^2-1}{(x+2)^2} > 0$ si $x < -1$ o $x > 1$; $\quad \dfrac{x^2-1}{(x+2)^2} < 0$ si $-1 < x < 1$.

Pequeños retos

Comprueba la certeza de las siguientes afirmaciones:

a) $\dfrac{-1}{x^3} < 0$ si $x > 0$ $\qquad$ b) $\dfrac{x-1}{x+2} > 0$ si $x > 1$ $\qquad$ c) $\dfrac{x-3}{x^2} < 0$ si $x < 3$.