FACTOR COMÚN

La relación de igualdad es simétrica; que significa que si A = B, entonces B = A. Esto, que parece una perogrullada, es de gran utilidad cuando se trabaja con expresiones matemáticas. Esa doble posibilidad de escribir la misma igualdad es lo que engloba la expresión "caminos de ida y vuelta": de A se puede pasar a B; pero de B también se puede pasar a A.

Las reglas de funcionamiento (propiedades) suelen escribirse mediante igualdades. Así se hace, por ejemplo, cuando se escribe a · (b + c) = a · b + a · c, que se conoce con el nombre de propiedad distributiva. Esta propiedad es de ida y vuelta. Esto es, puede aplicarse de izquierda a derecha o al revés.

Ejemplos:
a) Por la propiedad distributiva, $3 \cdot (7x - 2y) = 21x - 6y$.
Igualmente: $21x - 6y = 3 \cdot (7x - 2y)$; y al hacer esto se ha sacado factor común

b) La expresión $12x^2y^3 - 6xy^2 + 9x^3y^4$ puede escribirse, sacando el factor común $3xy^2$ de cada uno de sus términos, así:

$$12x^2y^3 - 6xy^2 + 9x^3y^4 = 3xy^2 \cdot \left(4xy - 2 + 3x^2y^2\right)$$

Haciéndolo por pasos, sería:

$$12x^2y^3 - 6xy^2 + 9x^3y^4 = \underline{3xy}^2 \cdot 4xy - \underline{3xy}^2 \cdot 2 + \underline{3xy}^2 \cdot 3xy^2 = \underline{3xy}^2 \cdot \left(4xy - 2 + 3x^2y^2\right)$$

Nota: Posiblemente, el no iniciado no descubra a primera vista que $3xy^2$ es factor común en los tres sumandos; pero puede descubrir que xy sí lo es. Entonces escribirá:

$$12x^2y^3 - 6xy^2 + 9x^3y^4 = xy \cdot \left(12xy^2 - 6y + 9x^2y^3\right)$$

A continuación, al ver el segundo miembro, tiene más fácil descubrir que y vuelve a repetirse en cada uno de los sumando, y quizás que los números que intervienen, los factores 12, –6 y 9, son múltiplos de 3. Y, así, fijándose, podrá concluir felizmente el proceso de sacar factor común.

- La *operación* de sacar factor común se utiliza frecuentemente en matemáticas; la mayor parte de las veces para facilitar la resolución de ecuaciones. A continuación se indican otros ejemplos:

Ejemplos:
a) Ecuaciones polinómicas de tercer grado o superior:
La ecuación $x^3 - 6x^2 + 5x = 0$ se resuelve sacando factor común x. Así:

$$x^3 - 6x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow x\left(x^2 - 6x + 5\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 6x + 5 = 0 \to x = 1; x = 5 \end{cases}$$

(Recuérdese que para que un producto sea 0 es necesario que alguno de los factores lo sea.

Advertencia: Cuando una expresión está factorizada, para resolver la ecuación asociada no hay que multiplicar; hacerlo supondría retroceder.
Así, para hallar las soluciones de la ecuación $(x+2)\cdot(2x-3)\cdot\left(x^2 - 6x\right) = 0$, basta con resolver:

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2;\ 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3/2;\ x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x(x-6) = 0 \Rightarrow x = 0; x = 6$$

b) Ecuaciones en las que aparecen exponenciales:
Para resolver $4e^x - x^2e^x = 0$ hay que sacar factor común e^x.

Así: $4e^x - x^2e^x = 0 \Leftrightarrow \left(4-x^2\right)\cdot e^x = 0 \Rightarrow 4-x^2=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$.

c) Ecuaciones trigonométricas:
Para resolver la ecuación $\sin^2 x - 2\sin x\cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x\left(\sin x - 2\cos x\right)=0 \Rightarrow$

$\sin x = 0 \Rightarrow x=0; x=\pi$ (en grados: x = 0; x = 180º)

$\sin x - 2\cos x = 0 \Rightarrow \sin x = 2\cos x \Rightarrow \dfrac{\sin x}{\cos x}=2 \Rightarrow \tan x = 2 \Rightarrow x=\arctan 2 =$ 1,1071… (en grados: x = 63,4349º)

Observación: Como las funciones trigonométricas son periódicas, las ecuaciones anteriores tienen infinitas soluciones.

- En la simplificación de expresiones algebraicas el factor común facilita los cálculos. Así resulta eficaz en la derivada segunda.

Ejemplos:

a) La derivada segunda de la función $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}$ es:

$$f´(x)=\frac{2(x^2-1)-2x\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{-2x^2-2}{\left(x^2-1\right)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f´´(x)=\frac{-4x\left(x^2-1\right)^2-\left(-2x^2-2\right)\cdot 2\left(x^2-1\right)\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^4}=\frac{\left(-4x\left(x^2-1\right)-\left(-2x^2-2\right)\cdot 2\cdot 2x\right)\left(x^2-1\right)}{\left(x^2-1\right)^4}\Rightarrow$$

$$f´´(x)=\frac{\left(-4x\left(x^2-1\right)-\left(-2x^2-2\right)\cdot 2\cdot 2x\right)}{\left(x^2-1\right)^3}=\frac{-4x^3+4x+8x^3+8x}{\left(x^2-1\right)^3}=\frac{4x^3+12x}{\left(x^2-1\right)^3}=\frac{4x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3}$$

b) Un ejemplo más, relacionado con la suma de fracciones.
Es relativamente fácil hacer la suma $\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{1}{3x}-\dfrac{2}{3}$, pues reduciendo a común denominador, que es $3x^2$, se tiene:

$$\frac{5}{x^2}+\frac{1}{3x}-\frac{2}{3}=\frac{5\cdot 3}{3x^2}+\frac{1\cdot x}{3x\cdot x}-\frac{2\cdot x^2}{3\cdot x^2}=\frac{15+x-2x^2}{3x^2}.$$

En cambio, la partición en sumas o restas de $\dfrac{15+x-2x^2}{3x^2}$ resulta menos inmediata; me refiero a la descomposición $\dfrac{15+x-2x^2}{3x^2}=\dfrac{15}{3x^2}+\dfrac{x}{3x^2}-\dfrac{2\cdot x^2}{3x^2}=\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{1}{3x}-\dfrac{2}{3}$.

Como es natural, se hará una cosa u otra (camino de ida o camino de vuelta) dependiendo de las necesidades.

Pequeños retos

1) Escribe como producto, extrayendo el mayor factor común, cada una de las siguientes expresiones:

a) $8xy^3-6xy^2+4x^2y$ b) $4x^2-4x+1$ c) $9x^2-25$

2) Expresa como una sola fracción:

a) $x-2+\dfrac{1}{x}$ b) $\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{x-1}{x}$ c) $\dfrac{x^2+3}{x-3}-x+1$.

3) Expresa como suma de fracciones (o simplifica si es el caso) cada una de las expresiones:

a) $\dfrac{2+x-2x^2}{x^2}$ b) $\dfrac{4-x^2}{x+2}$ c) $\dfrac{3x^3-2x^2+5x}{x}$

Soluciones:

1) a) $2xy\left(4y^2-3y+2x\right)$. b) $(2x-1)^2$. c) $(3x+5)(3x+5)$

2) a) $\dfrac{(x-1)^2}{x}$. b) $\dfrac{2-x^2+x}{x^2}$. c) $\dfrac{4x}{x-3}$.

3) a) $\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x}-2$. b) $2-x$. c) $3x^2-2x+5$