

ECUACIONES LOGARÍTMICAS Y MIXTAS

Las ecuaciones logarítmicas vistas en el documento anterior podrían calificarse de clásicas y su conocimiento es imprescindible. No obstante, en la práctica ordinaria surgen ecuaciones que sin ser propiamente exponenciales o logarítmicas se simplifican (y resuelven) si se transforman en ellas; otras veces aparecen situaciones mixtas, en las que expresiones exponenciales o no aparecen juntas. Con frecuencia esas ecuaciones se presentan ante el estudiante como un muro que no se atreve a derribar. Sea como sea, lo único que se puede hacer para mejorar es:

- 1) Conocer y saber aplicar las propiedades de la potenciación.
- 2) Conocer la definición de logaritmo y saber aplicar sus propiedades.
- 3) Saber operar correctamente.

Ecuaciones que se resuelven aplicando logaritmos

Por ejemplo:

$$\log_a b = x \rightarrow (\log_2 21 = x); \log_x a = b \rightarrow (\log_x 1000 = 5); x^a = b \rightarrow (x^{4,2} = 4,2)$$

- Ecuación $\log_a b = x$

Si la base a vale 10 o e se resuelven directamente con la calculadora: se aplica el antilogaritmo.

Si $a \neq 10$ y e puede aplicarse la fórmula del cambio de base o la definición de logaritmo.

Observación:

Para calcular el logaritmo en cualquier base no decimal puede utilizarse la fórmula $\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$.

Ejemplo:

El valor de x en la ecuación $\log_2 21 = x$ es $x = \frac{\log 21}{\log 2} = 4,3923$.

→ La fórmula anterior es una consecuencia de aplicar las siguientes transformaciones:

$$\log_2 21 = x \Rightarrow (\text{definición de logaritmo}) 2^x = 21 \Rightarrow (\text{aplicando logaritmos}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log 2^x = \log 21 \Rightarrow x \log 2 = \log 21 \Rightarrow x = \frac{\log 21}{\log 2} = 4,3923$$

- Ecuación $\log_x a = b$

Aplicando la definición de logaritmo se transforma en otra ecuación ya vista, pues:

$$\log_x a = b \Rightarrow a = x^b \Rightarrow x = a^{1/b}$$

Ejemplos:

a) $\log_x 1000 = 5 \Rightarrow x^5 = 1000 \Rightarrow x = 1000^{1/5} = 3,98107 \rightarrow$ Esta operación se hace con calculadora.

b) $\log_x 81 = 2 \Rightarrow$ (Por definición de logaritmo) $x^2 = 81 \Rightarrow x = 9$.

- La ecuación $x^a = b$, no es exponencial pero, a veces, el uso de las técnicas anteriores facilita su resolución.

Ejemplo:

La ecuación $x^{4,2} = 4,2$ puede resolverse de dos formas:

1) Despejando: $x^{4,2} = 4,2 \Rightarrow x = 4,2^{1/4,2} = 4,2^{0,2380952381} = 1,407319444$

2) Aplicando logaritmos: $x^{4,2} = 4,2 \Rightarrow \log x^{4,2} = \log 4,2 \Rightarrow 4,2 \log x = \log 4,2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \log x = \frac{\log 4,2}{4,2} = \frac{0,6232492904}{4,2} = 0,1483926882 \Rightarrow x = \text{antilog } 0,1483926882 = 1,407319444$$

Ecuaciones mixtas

Llamaremos así a las ecuaciones en las que intervengan mezclas exponenciales, logaritmos y otras expresiones.

Ejemplos:

a) La ecuación $\log 7 = 2x - 5$ es lineal. Se resuelve despejando

$$\log 7 = 2x - 5 \Rightarrow 2x = 5 + \log 7 \Rightarrow x = \frac{5 + \log 7}{2} = 2,9225$$

b) Para resolver $xe^x - 2e^x = 0$ hay que sacar factor común:

$$xe^x - 2e^x = 0 \Rightarrow (x - 2)e^x = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2.$$

Una exponencial, cualquiera que sea la base, nunca vale 0.

c) La ecuación $\log(9^{x-1} + 7) = 2 \log(3^{x-1} + 1)$ puede resolverse aplicando la propiedades

$$n \log A = \log A^n \text{ y } \log A = \log B \Rightarrow A = B.$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \log(9^{x-1} + 7) = 2 \log(3^{x-1} + 1) &\Leftrightarrow \log(9^{x-1} + 7) = \log(3^{x-1} + 1)^2 \Leftrightarrow 9^{x-1} + 7 = (3^{x-1} + 1)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 9^{x-1} + 7 = 9^{x-1} + 2 \cdot 3^{x-1} + 1 &\Rightarrow 2 \cdot 3^{x-1} = 6 \Rightarrow 3^{x-1} = 3 \Rightarrow x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2. \end{aligned}$$

(En la línea anterior se ha aplicado la propiedad $(3^{x-1})^2 = (3^2)^{x-1} = 9^{x-1}$).

Pequeños retos

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\log_5 200 = x$

b) $\log_x 1024 = 10$

c) $\ln 3x = 3$

d) $\log 2x = 4$

e) $\log(2x - 5) = 1$

f) $2 \log x^3 = 3$

g) $\frac{1}{3} \log \sqrt{2x} = 2$

h) $\log_6 x = 1,5$

i) $\log_4 32 = 3x$

j) $\ln(x - 1) = 2$

k) $\ln x^2 = -1$

l) $\log_x 8 = 3$

m) $\log_x 3 = 8$

n) $\log_8 x = 3$

o) $\log_3 x = 8$

p) $\ln \frac{1}{x} = 2$

q) $x^2 e^x - e^x = 0$

r) $2x^2 - e = 0$

s) $e^{-x}(x^2 + 1) = 0$

t) $\frac{e^x + 1}{e^{2x}} = 1$

Soluciones:

a) 3,2920. b) 2. c) $e^3/3$. d) 5000. e) 7,5. f) $\sqrt{10}$. g) $\frac{10^{12}}{2}$. h) $\sqrt{6^3}$. i) 5/6. j) 101. k) $e^{-1/2}$.

l) 2. m) $3^{1/8}$. n) 8^3 . o) 3^8 . p) e^{-2} . q) ± 1 . r) $\sqrt{e/2}$; s) No tiene sol. t) $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.