ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Son aquellas en las que la incógnita está "dentro" de un logaritmo.
Suelen presentarse dos tipos:
1) La incógnita aparece sólo una vez ligada al logaritmo, siendo los otros elementos de la ecuación números. Si $E(x)$ designa una expresión en *x*, los casos genéricos son:

$\log_a(E(x)) = b$ $\qquad b + k\log_a(E(x)) = c$

Algunos ejemplos concretos son:

$\log x = 3$ $\qquad 3 + \log(x + 20) = 5$ $\qquad \log(2x - x^2) = 0$

2) Aparecen sumas y productos, como en los casos:

$\log(x+5) - 2\log(x-4) = 1$ $\qquad \log(3x-1) + \log x = 1$

- Ecuación $\log_a(E(x)) = b$:

Las ecuaciones del tipo $\log_a(E(x)) = b$ se resuelve empleando la definición de logaritmo y alguna propiedad de la potenciación, pues en general:

$$\log_a(E(x)) = b \Leftrightarrow E(x) = a^b$$

Ejemplos:
a) $\log x = 3$ (aplicando la definición de logaritmo) $\Rightarrow x = 10^3 = 1000$.
(También podría hacerse directamente con la calculadora, aplicando antilogaritmos).

b) $\log 2x = 5 \Rightarrow 2x = \text{anti}\log 5 = 100000 \Rightarrow x = 50000$.

c) $\ln\sqrt{x+3} = 2 \Leftrightarrow \ln(x+3)^{1/2} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln(x+3) = 2 \Rightarrow \ln(x+3) = 4 \Rightarrow x+3 = e^4 \Rightarrow x = e^4 - 3$.
También se podría hacer así: $\ln\sqrt{x+3} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x+3} = e^2 \Leftrightarrow x+3 = e^4 \Rightarrow x = e^4 - 3$.

d) $\log_3 x = -1{,}3 \Rightarrow x = 3^{-1{,}3} = 0{,}2397410311$.

<u>USO DE CALCULADORAS</u>
Para hallar $3^{-1,3}$, la secuencia a seguir con la calculadora es: 3 $\boxed{\wedge}$ –1,3 $\boxed{=}$ 0,2397410311.

→ Si se trabaja con logaritmos decimales o neperianos, la solución puede hallarse directamente mediante <u>antilogaritmos</u>: "el antilogaritmo de un número *a*, antilog *a*, es el número *x* que cumple que $\log x = a$". Por ejemplo, antilog 2 = 100, pues log 100 = 2.
Con la calculadora se obtiene aplicando sucesivamente las teclas: 2 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{log}}$ o $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{log}}$ 2, dependiendo del modelo.

Ejemplos:
a) $\log x = 3{,}1 \Rightarrow x = \text{antilog } 3{,}1 \Rightarrow$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{log}}$ 3,1 $\boxed{=}$ 1258,924512 $\Rightarrow x = 1258{,}924512$

b) $\ln x = 1{,}5 \Rightarrow x = \text{antiln } 1{,}5 = e^{1{,}5} = 4{,}48168907 \to$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{ln}}$ 1,5 $\boxed{=}$ 1258,924512.

- Ecuación $b + k\log_a(E(x)) = c$:

Estas ecuaciones se resuelven transformándolas, mediante operaciones y utilizando las propiedades de los logaritmos, en su equivalente de la forma $\log_a(E(x)) = b$.

Ejemplos:

a) $3\log x = 1 \Rightarrow$ (despejando) $\log x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \text{anti}\log\frac{1}{3}$ = 2,1544.

La ecuación $\log x^3 = 1$ es idéntica a la anterior, pues $\log x^3 = 3\log x$.

b) $3 + \log(x+20) = 5 \Rightarrow \log(x+20) = 2 \Rightarrow x + 2 = 10^2 \Rightarrow x + 2 = 100 \Rightarrow x$ = 98.

c) $\log(2x - x^2) = 0 \Rightarrow 2x - x^2 = 10^0 \Rightarrow 2x - x^2 = 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x$ = 1.

Ecuaciones logarítmicas son sumas o restas

Para resolverlas hay que transformarlas, aplicando las propiedades de los logaritmos, en alguna de las ya estudiadas.

Ejemplos:

a) $\log(x+5) - 2\log(x-4) = 1 \Leftrightarrow$ (propiedad de la potencia) $\log(x+5) - \log(x-4)^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ (propiedad de la resta) $\log\frac{x+5}{(x-4)^2} = 1 \Rightarrow$ (por definición) $\frac{x+5}{(x-4)^2} = 10 \Rightarrow x + 5 = 10(x-4)^2$

$\Rightarrow x + 5 = 10(x^2 - 8x + 16) \Rightarrow 10x^2 - 81x + 155 = 0 \Rightarrow x = 5$ y x = 3,1.

(El valor x = 3,1 no vale como solución, como se explica en la observación de abajo).

b) $\log(3x-1) + \log x = 1 \Leftrightarrow$ (propiedad de la suma) $\log((3x-1)\cdot x) = 1 \Rightarrow$ (por definición)

$(3x-1)\cdot x = 10 \Rightarrow 3x^2 - x - 10 = 0 \Rightarrow x = 2$ y $x = -5/3$. (La solución $x = -5/2$ no es válida.)

<u>Observación</u>:

Las soluciones obtenidas al realizar todo el proceso no siempre son válidas. Para que sean válidas es necesario que el valor obtenido al sustituir sea positivo en caso de estar afectado por el logaritmo.
Así, en el ejemplo a) no vale la solución x = 3,1 pues al sustituirlo ese valor en la ecuación se obtiene $\log(3{,}1 + 5) - 2\log(3{,}1 - 4) = 1 \rightarrow \log 8{,}1 - 2\log(-0{,}9) = 1$, pero el logaritmo de un número negativo no existe.
De manera similar, en el ejemplo b), al sustituir la solución $x = -5/2$ en la ecuación inicial resulta log (–5/2), que no está definido.

Pequeños retos

Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log\frac{x}{2} = -1$ b) $\log x - \log 2 = 1$ c) $\frac{\log(2x-3)}{\log(x-3)} = 2$

d) $\log(2x-1) = 2\log x$ e) $3\log x - 5\log 2 = \log\frac{x}{2}$ f) $\log(x+1) - \log(x-3) = 1$

Soluciones:

a) x = 0,2. b) $\log x - \log 2 = 1$. c) x = 6. d) x = 1. e) x = 4. f) x = 31/9.