ECUACIONES EXPONENCIALES (SENCILLAS)

En estas ecuaciones la incógnita está en el exponente de una potencia o va ligada a un logaritmo. Suelen resolverse aplicando las propiedades de las potencias (ver) y de los logaritmos (ver), y de las operaciones algebraicas usuales.
En algún momento del proceso suele aplicarse alguna de las propiedades:
1) $A^{f(x)} = A^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$
2) $\log_a(f(x)) = \log_a(g(x)) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$
3) Y por supuesto, la definición de logaritmo: $\log_a(f(x)) = b \Rightarrow f(x) = a^b$

Ecuaciones exponenciales
Suelen presentarse dos tipos:
1) La incógnita aparece sólo una vez como exponente, siendo los otros elementos de la ecuación números. Los casos genéricos más sencillos son: $a^x = b$ y $b + k\cdot a^{px+q} = c$
Algunos ejemplos concretos: $3^x = 9$; $\frac{1}{2^x} = 8$; $3^x = 30$; $2 - 3\cdot 5^x = 1$
2) Aparecen sumas y productos, como en los casos: $4^x - 5\cdot 2^x - 24 = 0$; $2\cdot 3^x - 5\cdot 3^{x-1} = 3$
→ Se verán en otro documento: Ecuaciones exponenciales son sumas y restas.

- Ecuación $a^x = b$:

Las ecuaciones del tipo $a^x = b$, con a y $b > 0$, se resuelven aplicando logaritmos, pues en general:

$$a^x = b \Rightarrow \log a^x = \log b \Rightarrow x\cdot\log a = \log b \Rightarrow x = \frac{\log b}{\log a}.$$

Ejemplos:
a) $3^x = 30 \Rightarrow \log 3^x = \log 30 \Rightarrow x\log 3 = \log 30 \Rightarrow x = \frac{\log 30}{\log 3} = \frac{1,477...}{0,477...} = 3,0959...$

b) Otras veces se reducen a un ejercicio de potenciación, como en los casos $3^x = 9$ y $\frac{1}{2^x} = 8$.
→ La ecuación $3^x = 9$ es inmediata: su solución es $x = 2$.
→ Para resolver $\frac{1}{2^x} = 8$, hay que expresarla en la forma $2^{-x} = 8 \Leftrightarrow 2^{-x} = 2^3 \Rightarrow x = -3$.

- Ecuación $b + k\cdot a^{px+q} = c$:

Para resolver ecuaciones del tipo $b + k\cdot a^{px+q} = c$, hay que transformarlas en la forma anterior: $a^{px+q} = B$. A continuación se aplicarán logaritmos y se despejará.

Ejemplos:
a) $2 - 3\cdot 5^x = 1 \Rightarrow -3\cdot 5^x = -1 \Rightarrow 5^x = \frac{1}{3} \Rightarrow \log 5^x = \log\frac{1}{3} \Rightarrow x\log 5 = \log\frac{1}{3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{\log(1/3)}{\log 5} = \frac{-0,4771...}{0,6989...} = -0,6826...$$

b) $5\cdot 2^x = 100 \Rightarrow 2^x = 20 \Rightarrow \log 2^x = \log 20 \Rightarrow x\log 2 = \log 20 \Rightarrow x = \frac{\log 20}{\log 2} = \frac{1,3010...}{0,3010...} = 4,3219$

c) $5^{x-1}=15 \Rightarrow \log 5^{x-1}=\log 15 \Rightarrow (x-1)\log 5=\log 15 \Rightarrow x-1=\dfrac{\log 15}{\log 5}=\dfrac{1{,}1761}{0{,}6990}=1{,}6826 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=2{,}6826$.

d) $0{,}4\cdot 3^{2x}=7 \Rightarrow 3^{2x}=\dfrac{7}{0{,}4}=17{,}5 \Rightarrow \log 3^{2x}=\log 17{,}5 \Rightarrow 2x\log 3=\log 17{,}5 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=\dfrac{\log 17{,}5}{2\log 3}=1{,}3026$.

e) La ecuación $e^{2x-1}=0$ no tiene solución: una potencia de base no nula nunca vale 0.

f) Las ecuaciones: $e^{2x-1}=1 \Rightarrow 2x-1=0 \Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$; $e^{2x-1}=e \Rightarrow 2x-1=1 \Rightarrow x=1$.

g) La ecuación $e^{2x-1}=3 \Rightarrow \ln e^{2x-1}=\ln 3 \Rightarrow (2x-1)\ln e=\ln 3 \Rightarrow 2x-1=\ln 3 \Rightarrow x=\dfrac{1+\ln 3}{2}$.

h) La ecuación $e^{-0{,}00012x}=0{,}5 \Rightarrow \ln e^{-0{,}00012x}=\ln 0{,}5 \Rightarrow -0{,}00012x=\ln 0{,}5 \Rightarrow x=-\dfrac{\ln 0{,}5}{0{,}00012} \Rightarrow$

$\Rightarrow x\approx 5766{,}23$. (Esta ecuación está relacionada con la descomposición del carbono 14).

Observaciones:

1) En numerosas ocasiones aparece la ecuación $A^{f(x)}=1$. Es equivalente a $f(x)=0$. Así, por ejemplo $3^{2x-3}=1 \Rightarrow 2x-3=0 \Rightarrow x=\dfrac{3}{2}$.

2) En las ecuaciones exponenciales suelen ser frecuentes los errores derivados de la mala aplicación de las operaciones elementales: potenciación, paréntesis… Alguno de esos errores podría ser:
ERROR: $5\cdot 2^x=100 \Rightarrow 10^x=100 \Rightarrow x=2 \rightarrow$ El error consiste en obviar un paréntesis, que en este caso no hay: $5\cdot 2^x=100$ NO es equivalente a $(5\cdot 2)^x=100 \Leftrightarrow 10^x=100$; $5\cdot 2^x=100 \Rightarrow 2^x=50$.

3) Aunque no son ecuaciones exponenciales, pueden tratarse como tales las dos siguientes:

- Ecuación $a^b=x$. (Si *a* es negativo puede que esta expresión no tenga sentido)

Es un ejercicio común de potenciación. Puede resolverse con la calculadora.

Ejemplo: $4^{3{,}2}=x$. Con la calculadora se obtiene x = 84,4885. (Teclas 4 $\boxed{\wedge}$ 3,2 $\boxed{=}$).

- Ecuación $x^a=b$, $b>0$. Puede resolverse aplicando logaritmos (antilogaritmos).

Ejemplo:

$x^4=15 \rightarrow$ Aplicando logaritmos: $x^4=15 \Rightarrow \log x^4=\log 15 \Rightarrow 4\log x=\log 15 \Rightarrow$

$\log x=\dfrac{\log 15}{4}=\dfrac{1{,}176091259}{4}=0{,}294022814 \Rightarrow x=\text{antilog } 0{,}29022814=1{,}967989671$

Para calcular antilogaritmo, pulsar: $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\log}$ 0,29022814

Pequeños retos

Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $8^{2x}=45$ b) $3^{2x-1}=81$ c) $2^{-2x}=3$ d) $e^{x^2-1}=1$

e) $e^{x+3}=e$ f) $e^{-0{,}04x}=0{,}5$ g) $1{,}5^{3{,}2}=x$ h) $x^{4{,}2}=2000$

Soluciones: a) x = 0,9153... b) x = 5/2. c) x = –0,79248… d) x = ±1. e) x = –2. f) $x\approx$ 17,33. g) 3,66009… h) 6,1088…