ECUACIONES CON VALORES ABSOLUTOS

Estas ecuaciones pueden presentarse asociadas a cualquier expresión, pero en algún término figura el valor absoluto.
Por ejemplo:

$$|2x-1|=3; \qquad |x^2-3x|=0; \qquad \frac{4}{x}=|x|; \qquad \frac{|x|}{2-x}=1; \qquad 2x|4-x|=0$$

Todas se resuelven teniendo en cuenta el significado de valor absoluto:
$|E(x)|=c \Leftrightarrow E(x)=c$ o $E(x)=-c$.
Esto implica que cada ecuación da lugar a dos ecuaciones. (En algún caso conviene comprobar el resultado).

Ejemplos:
a) $|2x-1|=3 \Leftrightarrow 2x-1=3$ ó $2x-1=-3$. $\begin{cases} 2x-1=3 \Rightarrow x=2 \\ 2x-1=-3 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$. Las soluciones son $x = 2$ y $x = -1$.

b) La ecuación $|x^2-3x|=2$ da lugar a $x^2-3x=2$ y a $x^2-3x=-2$, equivalentes a su vez a $x^2-3x-2=0$ y a $x^2-3x+2=0$, cuyas soluciones son: $x=\frac{3+\sqrt{17}}{2}$, $x=\frac{3-\sqrt{17}}{2}$, $x = 1$ y $x = 2$.

c) $\frac{4}{x}=|x| \Leftrightarrow 4=x\cdot|x| \Rightarrow$ (si $x > 0$, como $|x|=x$) $\Rightarrow 4=x^2 \Rightarrow x = -2$ o $x = 2$.
→ La solución $x = -2$ no es válida, pues si se sustituye: $\frac{4}{-2}\neq|-2|$.
→ Si $x<0$, como $|x|=-x$, de $4=x\cdot|x| \Rightarrow 4=x\cdot(-x) \Rightarrow 4=-x^2$, que no tiene solución. (Recuerda que $x^2\geq 0$ y $-x^2<0$).

d) La ecuación $\frac{|x|}{2-x}=1 \Leftrightarrow |x|=2-x$, que a su vez define dos ecuaciones:
$-x=2-x$, que es imposible; y $x=2-x$, cuya solución es $x = 1$.

e) $2x|4-x|=0$ es más fácil. Sus soluciones son $2x=0$ y $4-x=0 \Rightarrow x = 0$ o $x = 4$.

Pequeños retos
Resuelve las siguientes ecuaciones:
a) $|3x+1|=2$ b) $|x+3|=2x-1$ c) $|x+6|=x^2$ d) $\frac{2}{x}=|x-1|$

Soluciones:
a) $x = -1$, $x = 1/3$. b) $x = -2/3$, $x = 4$. c) $x = -2$, $x = 3$. d) $x = 2$.