ECUACIONES DE TERCER GRADO

Son ecuaciones de la forma $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, siendo *a, b, c, d* números reales; $a \neq 0$.
Para resolver ecuaciones de tercero o grado superior no hay fórmulas elementales. Sólo pueden resolverse cuando tienen alguna solución entera: esa solución, si existe, será un número divisor del término independiente, *d*. Las demás soluciones pueden hallarse descomponiendo en factores la ecuación inicial.

Observaciones:
1) Una ecuación de tercer grado tiene al menos una solución real, aunque no siempre pueda encontrarse. Sus soluciones pueden ser dobles o triples.
2) Las soluciones de la ecuación $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ son las raíces del polinomio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Por tanto, vale todo lo que se dice en Factorización de polinomios.
3) La descomposición factorial de una ecuación es una buena técnica para su resolución, pues si una ecuación, cualquiera que sea su grado, viene dada como producto de factores igualados a 0, las soluciones de esa ecuación son las de cada uno de los factores igualados a cero.

Ejemplos:
a) Para resolver la ecuación $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ hay que encontrar alguna solución entera.
Si existe, será uno de los divisores de 6: ±1; ±2; ±3; ±6.
Se prueba con $x = 1 \to$ no vale, pues $1 - 4 + 1 + 6 \neq 0$; sí vale $x = -1$, pues $-1 - 4 - 1 + 6 = 0$.
En consecuencia, $x + 1$ es un factor de la ecuación; el otro factor se obtiene dividiendo (por Ruffini) y queda:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & 1 & 6 \\ -1 & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \left(x^3 - 4x^2 + x + 6\right) = (x+1)\left(x^2 - 5x + 6\right)$$

Por tanto,
$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x+1)\left(x^2 - 5x + 6\right) = 0 .$$
Las otras dos soluciones de la ecuación inicial son las de $\left(x^2 - 5x + 6\right) = 0$, que valen 2 y 3.
En consecuencia, las soluciones de la ecuación planteada son $x = -1$, $x = 2$ y $x = 3$.

b) Para resolver $x^3 - 9x = 0$ basta con sacar factor común:
$$x^3 - 9x = 0 \Leftrightarrow x\left(x^2 - 9\right) = 0 \Leftrightarrow x(x-3)(x+3) = 0$$
Sus soluciones son $x = 0$, $x = 3$ y $x = -3$.

c) La ecuación $x^3 + x^2 + 1 = 0$ no tiene ninguna solución entera, pues ni 1 ni –1, que son los únicos divisores del término independiente, lo son. Por tanto, en este caso no es posible dar la solución exacta.

d) Las soluciones de la ecuación $(x-1)(4x^2 - 1)(x^3 + 8) = 0$ son las de cada uno de los factores igualado a o. Esto es:
$$\begin{cases} x - 1 = 0 & \Rightarrow \quad x = 1 \\ 4x^2 - 1 = 0 & \Rightarrow \quad x = \pm 1/2 \\ x^3 + 8 = 0 & \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{-8} = -2 \end{cases}$$

Pequeños retos
Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = 0$ b) $4x^3 + 4x^2 - 3x = 0$
c) $2x^3 - 10x^2 + 14x - 6 = 0$ d) $(x^2 + 2x)(x^2 - 5x + 4) = 0$

Soluciones:

a) x = 2, única. b) x = 0, $x = -\frac{3}{2}$ y $x = \frac{1}{2}$. c) x = 1, doble; x = 3. d) x = 0, x = –2, x = 1, x = 4.