ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO; Y BICUADRADAS

Son de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$.

Su solución viene dada por la fórmula: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Pueden tener dos, una o ninguna solución real, dependiendo del valor que tome $b^2 - 4ac$.

→ Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene dos soluciones distintas;

→ Si $b^2 - 4ac = 0$, tiene una solución doble;

→ Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene soluciones reales.

- Si las soluciones de $ax^2 + bx + c = 0$ son x_1 y x_2 $\Rightarrow$ $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Si $ax^2 + bx + c = 0$ tiene una solución doble, $x = x_1$ $\Rightarrow$ $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$.
- Si $ax^2 + bx + c = 0$ no tiene soluciones reales $\Rightarrow$ $ax^2 + bx + c$ no puede descomponerse en producto de factores de primer grado.

<u>Ejemplos</u>:

a) La ecuación $2x^2 + 4x - 6 = 0$ tiene dos soluciones: $x_1 = -3$ y $x_2 = 1$.

En efecto: $x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{2 \cdot 2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{4} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{64}}{4} = \dfrac{-4 \pm 8}{4} = \begin{cases} -3 \\ 1 \end{cases}$.

Estas soluciones permiten descomponer factorialmente la expresión: $2x^2 + 4x - 6 = 2(x + 3)(x - 1)$.

b) La ecuación $x^2 + 4x + 4 = 0$ sólo tiene una solución doble, $x = -2$.

En efecto: $x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$.

c) La ecuación $-x^2 + 4x - 6 = 0$ no tiene soluciones reales, pues:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1)(-6)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 24}}{-2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-8}}{-2}$$

d) La ecuación $x^2 + px + 9 = 0$ tendrá dos soluciones si $p^2 - 36 > 0$; esto es, si $p < -6$ o $p > 6$. No tendrá soluciones reales cuando $-6 < p < 6$. Tendrá una solución doble si $p = -6$ o $p = 6$.

e) Una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean $x_1 = -1$ y $x_2 = 4$ es $(x + 1)(x - 4) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$.

Ecuaciones incompletas

Son de la forma:

(1) $ax^2 + bx = 0$, $c = 0$ (2) $ax^2 + c = 0$, $b = 0$

Para resolverlas no es necesario aplicar la fórmula dada: la primera puede resolverse sacando factor común; la segunda, despejando.

(1) $ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -b/a \end{cases}$.

(2) $ax^2 + c = 0 \Rightarrow ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = -c/a \Rightarrow x = \pm\sqrt{-c/a} \rightarrow -c/a$ debe ser positivo.

Ejemplos:
a) $x^2 - 4x = 0 \rightarrow$ (sacando factor común) $\Rightarrow x(x-4) = 0 \Rightarrow x = 0$ o $x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$.
Las soluciones son $x_1 = 0$ y $x_2 = 4$.

b) $2x^2 - 32 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 32 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \sqrt{16} = \pm 4$. Soluciones: $x_1 = -4$ y $x_2 = 4$.

c) $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \sqrt{9} = \pm 3$. Sus soluciones son: $x = 3$, $x = -3$.

d) $x^2 + 4 = 0$ no tiene soluciones reales. (Si se despeja: $x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4$; que no es posible).

e) $\dfrac{-3000}{x^2} + 1920 = 0 \Leftrightarrow -3000 + 1920x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \dfrac{3000}{1920} \Rightarrow x = \sqrt{\dfrac{3000}{1920}} = \pm 1{,}25$.

Ecuaciones bicuadradas
Las ecuaciones de cuarto grado de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$, se llaman bicuadradas. Se resuelven empleando la fórmula de la ecuación de segundo grado, pues haciendo $x^2 = t$, queda:

$ax^4 + bx^2 + c = 0 \Leftrightarrow at^2 + bt + c = 0 \longrightarrow t$ puede tomar dos, uno o ningún valor real

Una vez encontrado t, los valores de x serán $x = \pm\sqrt{t}$, siempre que exista $\sqrt{t}$.

Ejemplos:
a) La ecuación $x^4 - 3x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow t = 1$, $t = 2 \Rightarrow x = \pm 1$ y $x = \pm\sqrt{2}$.
Esta ecuación tiene cuatro soluciones reales: $x = 1$; $x = -1$; $x = \sqrt{2}$; $x = -\sqrt{2}$.

b) La ecuación $x^4 + 5x^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 5t - 36 = 0 \Rightarrow t = 4$, $t = -9 \Rightarrow x = \pm 2$ y $x = \pm\sqrt{-9}$, que no existe. Esta ecuación tiene dos soluciones reales: $x = -2$ y $x = 2$.

c) Si la ecuación bicuadrada es reducida es todavía más fácil. Por ejemplo:

$x^4 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x^2 = 0$;

$x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = 0$ y $x = \pm\sqrt{3}$.

Pequeños retos
1. Halla las soluciones de las siguientes ecuaciones de segundo grado:
a) $x^2 - x - 2 = 0$ b) $x^2 - 6x + 9 = 0$ c) $x^2 - 4x + 5 = 0$ d) $3x^2 + 6x - 24 = 0$

2. Halla las soluciones de las siguientes ecuaciones incompletas:
a) $x^2 - x = 0$ b) $3x^2 + 6x = 0$ c) $2x^2 - 72 = 0$ d) $3x^2 + 48 = 0$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:
a) $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$ b) $x^4 - 21x^2 + 80 = 0$ c) $x^4 - 25x^2 = 0$ d) $x^4 - 81 = 0$

Solución:
1. a) $x = -1$; $x = 2$. b) $x = 3$, doble. c) No tiene sol. d) $x = 2$; $x = -4$.
2. a) $x = 0$; $x = 1$. b) $x = 0$; $x = -2$. c) $x = -6$; $x = 6$. d) No tiene sol.
3. a) $x = \pm 2$. b) $x = \pm 4$ y $x = \pm\sqrt{5}$. c) $x = 0$ y $x = \pm 5$. d) $x = \pm 3$