

COMBINATORIA

Principio fundamental de enumeración

Si un suceso puede elegirse de m maneras distintas en primer lugar y a continuación puede elegirse de n maneras diferentes, entonces, la doble elección puede hacerse de $m \cdot n$ formas diferentes.

Ejemplo:

Si en un restaurante puede elegirse uno entre 6 “primeros platos” y, a continuación, otro entre “5 segundos platos”, un comensal puede hacerlo de $6 \cdot 5 = 30$ maneras diferentes.

Variaciones de m elementos tomados n a n : $V_{m,n}$

Variaciones de m elementos tomados n a n ($n \leq m$) son cada uno de los grupos diferentes, de n elementos distintos cada grupo, que pueden formarse con los m elementos disponibles, teniendo en cuenta que dos de esos grupos son diferentes cuando:

1) tienen algún elemento distinto, o 2) están colocados en distinto orden.

- Número de variaciones: $V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \dots \cdot (m-(n-1))$

Ejemplo:

a) $V_{16,8} = 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \rightarrow$ (ocho factores).

b) 5 personas pueden sentarse en una fila de 8 butacas de variaciones de 8 (butacas) elegidas de 5 en 5. El número de posibilidades es $V_{8,5} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$.

Variaciones con repetición de m elementos tomados n a n son cada uno de los grupos diferentes, de n elementos cada grupo, repetidos o no, que pueden formarse con los m elementos disponibles, teniendo en cuenta que dos grupos son diferentes cuando:

1) tienen algún elemento distinto, o 2) están colocados en distinto orden.

- Número de variaciones con repetición: $VR_{m,n} = m \cdot m \cdot \dots \cdot m = m^n$

Ejemplos:

a) $VR_{6,4} = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4 = 1296$.

b) El sistema binario utiliza los dígitos 0 y 1 para almacenar datos. Un byte está formado por 8 dígitos (por 8 bits); por ejemplo 10011101 o 11100010. Hay 2^8 bytes diferentes, que se obtienen variando con repetición, hasta 8 veces, los dígitos 0 y 1: $VR_{2,8} = 2^8 = 256$.

Permutaciones de n elementos

Permutaciones de n elementos son cada uno de los grupos diferentes que pueden formarse con los n elementos disponibles, teniendo en cuenta que dos de esos grupos son diferentes cuando los elementos están colocados en distinto orden. (Coincide con las $V_{n,n}$).

- Su número es $P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

Ejemplo:

El número de permutaciones de 7 elementos es $P_7 = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$.

Permutaciones con repetición de m elementos, en los que un elemento A se repite a veces, otro B se repite b veces, ..., otro H se repite h veces, con $a + b + \dots + h = m$, son cada uno de los grupos diferentes que pueden formarse de m elementos cada grupo, teniendo en cuenta que dos grupos son diferentes cuando los elementos están colocados en distinto orden.

- Su número se denota por $P_m^{a,b,\dots,h}$ y vale: $P_m^{a,b,\dots,h} = \frac{m!}{a! \cdot b! \cdot \dots \cdot h!}$

Ejemplo:

$$P_5^{2,3} = \frac{P_5}{P_2 \cdot P_3} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10.$$

→ Algunas de estas permutaciones son: $AABBB, ABBAB \dots$

Combinaciones de m elementos tomados n a n : $C_{m,n}$

Combinaciones de m elementos tomados n a n ($n \leq m$) son cada uno de los grupos diferentes, de n elementos distintos cada grupo, que pueden formarse con los m elementos disponibles, teniendo en cuenta que dos de esos grupos son diferentes solamente cuando hay algún elemento distinto.

- Número de combinaciones: $C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n}$

Este número coincide con el número combinatorio $\binom{m}{n}$. Por tanto: $C_{m,n} = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$

Ejemplo:

$$C_{16,5} = \binom{16}{5} = \frac{16!}{5! \cdot 11!} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot (11!)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (11!)} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 2 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 = 4368$$

Pequeños retos

1. Escribe todas las variaciones de las letras B, C, D y F tomadas dos a dos. ¿Cuántas son?
2. Con los dígitos del 0 al 9, ¿cuántos números de tres cifras se pueden escribir? ¿Cuántos de esos números no tienen ninguna cifra repetida? (Deben tenerse en cuenta los números que comienzan por 0, como 000, 001, 012).
3. Calcula:

a) $V_{9,3}$	b) $V_{7,4}$	c) $VR_{10,4}$	d) $VR_{3,5}$	e) $C_{9,3}$	f) $C_{7,4}$
--------------	--------------	----------------	---------------	--------------	--------------
4. Escribe todas las permutaciones de los números 1, 3, 5, 7. ¿Cuántas hay?
5. Un examen contiene 10 preguntas, de las que hay que contestar 8, en el orden que se desee. ¿De cuántas maneras posibles pueden elegirse las 8 respuestas?

Soluciones:

1. 12.
2. $VR_{10,3} = 1000$. $V_{10,3} = 720$.
3. a) 504. b) 840. c) 10000. d) 243. e) 84. f) 140.
4. $P_4 = 24$.
5. $C_{10,8} = 45$.