POTENCIA DE UN BINOMIO: FÓRMULA DE NEWTON

Fórmula de Newton para el cálculo de la potencia *n*-ésima de un binomio:

$$(p+q)^n = \binom{n}{0}p^n + \binom{n}{1}p^{n-1}q + \binom{n}{2}p^{n-2}q^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}pq^{n-1} + \binom{n}{n}q^n$$

$$(p-q)^n = \binom{n}{0}p^n - \binom{n}{1}p^{n-1}q + \binom{n}{2}p^{n-2}q^2 - \ldots \pm \binom{n}{n-1}pq^{n-1} \pm \binom{n}{n}q^n$$

Ejemplos:

a) $(2x+4)^3 = \binom{3}{0}(2x)^3 + \binom{3}{1}(2x)^2\cdot 4 + \binom{3}{2}(2x)\cdot 4^2 + \binom{3}{3}\cdot 4^3 = 8x^3 + 48x^2 + 96x + 64$.

b) $(x-2)^4 = \binom{4}{0}x^4 - \binom{4}{1}x^3\cdot 2 + \binom{4}{2}x^2\cdot 2^2 - \binom{4}{3}x\cdot 2^3 + \binom{4}{4}\cdot 2^4 = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 48x + 16$.

<u>Observaciones:</u>

1) El valor de los números combinatorios es $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$.

2) Para valores de *n* pequeños compensa hacer su cálculo recurriendo al triángulo de Tartaglia.
Si se ordenan de menor a mayor los coeficientes de las potencias sucesivas de $(p+q)^n$, se obtiene:

$\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$	Coeficientes de $(p+q)^1$	1 1
$\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$	Coeficientes de $(p+q)^2$	1 2 1
$\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$	Coeficientes de $(p+q)^3$	1 **3** **3** 1
$\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}$	Coeficientes de $(p+q)^4$	1 **<u>4</u>** **<u>6</u>** 4 1
$\binom{5}{0}\ \binom{5}{1}\ \binom{5}{2}\ \binom{5}{3}\ \binom{5}{4}\ \binom{5}{5}$	Coeficientes de $(p+q)^5$	1 5 **<u>10</u>** 10 5 1
… … …		… … …

Puede observarse que cada número "interior" del "triángulo" se obtiene sumando los dos inmediatos superiores. Todos los números "de fuera" valen 1.

Pequeños retos

Aplicando la fórmula halla:

a) $(2+5x)^3$ b) $(1-a)^5$

Solución:

a) $125x^3 + 150x^2 + 60x + 8$. b) $-a^5 + 5a^4 - 10a^3 + 10a^2 - 5a + 1$.