MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES
EXAMEN FINAL

1. (1,5 puntos) Dada la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

obtener de forma razonada los valores de *x*, *y*, *z*.

2. Sea el siguiente sistema de inecuaciones $\begin{cases} -5x+3y\leq 2 \\ x-2y\geq -6 \\ 2x+3y\leq 37 \end{cases}$.

a) (1,5 puntos) Representa el conjunto solución y determina sus vértices.
b) (1 punto) Halla el punto del recinto anterior en el cual la función $F(x,y)=-2x+5y$ alcanza su valor máximo. Justifica el resultado.

3. (Selectividad, Cantabria 16)
(2 puntos) El coste de producción de *x* unidades mensuales de un determinado producto es $C(x)=\dfrac{x^2}{2}+25x+25$, y el precio de venta de cada unidad es $70-\dfrac{x}{3}$ euros. Halla el número de unidades que deben venderse mensualmente para que el beneficio sea máximo. ¿A cuánto asciende dicho beneficio? ¿Y los ingresos?

4. (1,5 puntos) Determina el área finita de la región del plano comprendida entre las dos parábolas $y=-x^2+4x+1$ e $y=x^2-6x+9$.

5. Del alumnado que se matricula en la universidad, el 60 % acaba la carrera elegida y, de éstos, el 45 % son chicos. Además, el 25 % cambia de carrera, de los que el 30% son chicas, y el 15 % deja los estudios, de los que el 50 % son chicos.
a) (0,5 puntos) Construir un diagrama de árbol.
b) (0,5 puntos) Elegido un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea chico?
c) (0,5 puntos) Elegido un chico al azar, ¿cuál es la probabilidad de que cambie de carrera?

6. El peso de las peras de una cosecha (en Rincón de Soto) sigue una distribución normal con una desviación típica de 25 gramos.
a) (1 punto) Supongamos que tomamos una muestra de 121 peras y obtenemos un peso medio de 150 gramos, determinar un intervalo de confianza al 90 % para la media del peso.
b) (0,5 puntos) ¿Cuál habrá sido el tamaño y la media de una muestra si el intervalo de confianza al 85% obtenido para la media del peso es (156,4, 163,6)?

Alcalá de Henares, 16 de mayo de 2018

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES
EXAMEN FINAL (Recuperación de Álgebra)

1. (2 puntos) Dada la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

obtener de forma razonada los valores de x, y, z.

2. Sea el siguiente sistema de inecuaciones $\begin{cases} -5x+3y \le 2 \\ x-2y \ge -6 \\ 2x+3y \le 37 \end{cases}$.

a) (1,5 puntos) Representa el conjunto solución y determina sus vértices.
b) (1 punto) Halla el punto del recinto anterior en el cual la función $F(x, y) = -2x + 5y$ alcanza su valor máximo. Justifica el resultado.

3. (1,5 puntos) Halla las matrices A cuadradas de orden 2, que verifican la igualdad:

$$A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}A.$$

4. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 3 \\ 4 & 1 & -a \end{pmatrix}$, halla:

a) (1 punto) Los valores de a para los que la matriz A posea inversa.
b) (1 punto) La inversa de A para $a = 2$.

---

5. Se quiere estimar la proporción de personas que esperan que su situación económica mejore el año próximo. Para ello se ha preguntado a 500 personas de esa población, de las 175 esperan que su situación económica mejore: son optimistas.
a) (1 punto) Calcula un intervalo de confianza para la proporción de personas optimistas en esta población, con un nivel de confianza del 94%.
b) (1 punto) Si antes de conocer el resultado se quiere determinar un intervalo de confianza con el mismo nivel (94%) y un error máximo de 0,03, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra?

Alcalá de Henares, 16 de mayo de 2018

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

EXAMEN FINAL (Recuperación de Análisis)

---

1. Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, halla:

a) (1 punto) Sus intervalos de crecimiento y crecimiento; y sus extremos relativos, si los tiene.
b) (0,8 puntos) Con la información hallada en el apartado anterior y dando algunos valores haz un esbozo de su gráfica, indicando si tiene alguna asíntota.
c) (0,7 puntos) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x = 1$.

2. (2 puntos) Calcula los valores de los parámetros *a*, *b* y *c* en la función $f(x) = ax^3 - bx + c$, sabiendo que pasa por el origen de coordenadas y que tiene un máximo relativo en el punto (1, 4).

3. (2 puntos) El coste de producción de *x* unidades mensuales de un determinado producto es $C(x) = \dfrac{x^2}{2} + 25x + 25$, y el precio de venta de cada unidad es $70 - \dfrac{x}{3}$ euros. Halla el número de unidades que deben venderse mensualmente para que el beneficio sea máximo. ¿A cuánto asciende dicho beneficio? ¿Y los ingresos?

4. (1,5 puntos) Determina el área finita de la región del plano comprendida entre las dos parábolas $y = -x^2 + 4x + 1$ e $y = x^2 - 6x + 9$.

---

5. Se quiere estimar la proporción de personas que esperan que su situación económica mejore el año próximo. Para ello se ha preguntado a 500 personas de esa población, de las 175 esperan que su situación económica mejore: son optimistas.
a) (1 punto) Calcula un intervalo de confianza para la proporción de personas optimistas en esta población, con un nivel de confianza del 94%.
b) (1 punto) Si antes de conocer el resultado se quiere determinar un intervalo de confianza con el mismo nivel (94%) y un error máximo de 0,03, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra?

Alcalá de Henares, 16 de mayo de 2018

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES
EXAMEN FINAL (Recuperación de Probabilidad)

1. Del alumnado que se matricula en la universidad, el 60 % acaba la carrera elegida y, de éstos, el 45 % son chicos. Además, el 25 % cambia de carrera, de los que el 30% son chicas, y el 15 % deja los estudios, de los que el 50 % son chicos.
a) (0,6 puntos) Construir un diagrama de árbol.
b) (0,8 puntos) Elegido un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea chico?
c) (0,6 puntos) Elegido un chico al azar, ¿cuál es la probabilidad de que cambie de carrera?

2. En una clase de bachillerato, el 60% de los alumnos aprueban matemáticas, el 50% aprueban inglés y el 30% aprueban las dos asignaturas. Calcule la probabilidad de que un alumno elegido al azar:
a) (0,5 puntos) Apruebe alguna de las dos asignaturas (una o las dos).
b) (0,5 puntos) Apruebe Matemáticas sabiendo que ha aprobado inglés.

3. (2 puntos: 0,4 puntos cada apartado) Se hacen dos lanzamientos de un dado con seis caras numeradas del 1 al 6, y se consideran los sucesos: A = "la suma de las dos puntuaciones es par" y B = "la primera de las puntuaciones es impar". Halla:

a) $P(A)$ b) $P(B)$ c) $P(A \cap B)$ d) $P(A \cup B)$.

e) ¿Son independientes los sucesos A y B?

4. A lo largo de las diferentes pruebas de Selectividad se ha observado que la distribución de las calificaciones en el examen de Matemáticas siguen una ley normal de media 5,7 puntos y desviación típica 1,8.
a) (0,7 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que la nota de un estudiante elegido al azar sea superior a 6,3?
b) (0,8 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra de 49 alumnos tenga una media superior a 6,3 puntos?

5. El peso de las peras de una cosecha (en Rincón de Soto) sigue una distribución normal con una desviación típica de 25 gramos.
a) (1 punto) Supongamos que tomamos una muestra de 121 peras y obtenemos un peso medio de 150 gramos, determinar un intervalo de confianza al 90 % para la media del peso.
b) (0,5 puntos) ¿Cuál habrá sido el tamaño y la media de una muestra si el intervalo de confianza al 85% obtenido para la media del peso es (156,4, 163,6)?

6. Se quiere estimar la proporción de personas que esperan que su situación económica mejore el año próximo. Para ello se ha preguntado a 500 personas de esa población, de las 175 esperan que su situación económica mejore: son optimistas.
a) (1 punto) Calcula un intervalo de confianza para la proporción de personas optimistas en esta población, con un nivel de confianza del 94%.
b) (1 punto) Si antes de conocer el resultado se quiere determinar un intervalo de confianza con el mismo nivel (94%) y un error máximo de 0,03, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra?

Alcalá de Henares, 16 de mayo de 2018

1. (1,5 puntos) Dada la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

obtener de forma razonada los valores de *x*, *y*, *z*.

Solución:

Operando se obtiene:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3x-2y \\ -2x+y \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4x-2y \\ -2x+2y \\ y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x-2y=-10 \\ -2x+2y=6 \\ y+z=3 \end{cases}.$$

El sistema obtenido se resuelve mediante transformaciones de Gauss:

$$\underset{E2+E1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 4x-2y=-10 \\ 2x=-4 \\ y+z=3 \end{cases} \Rightarrow x=-2;\ y=1;\ z=2$$

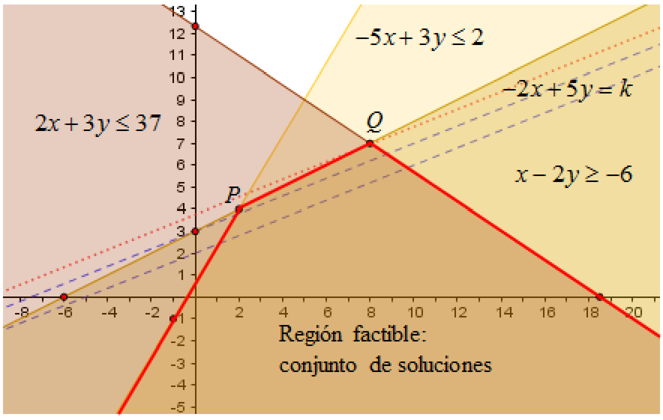
2. Sea el siguiente sistema de inecuaciones $\begin{cases} -5x+3y \le 2 \\ x-2y \ge -6 \\ 2x+3y \le 37 \end{cases}$.

c) (1,5 puntos) Representa el conjunto solución y determina sus vértices.

d) (1 punto) Halla el punto del recinto anterior en el cual la función $F(x,y)=-2x+5y$ alcanza su valor máximo. Justifica el resultado.

Solución:

a) Representando cada una de las rectas asociadas a las inecuaciones se obtiene la región sombreada en la siguiente figura.



Recta $-5x+3y=2 \to$

Puntos: (–1, –1) y (2, 4).

$-5x+3y \le 2 \to$ semiplano de la derecha.

Recta $x-2y=-6 \to$

Puntos: (–6, 0) y (0, 3).

$-5x+3y \le 2 \to$ semiplano de la derecha.

Recta $2x+3y=37 \to$

Puntos: (0, 37/3) y (37/2, 0).

$2x+3y \le 37 \to$ semiplano de la izquierda.

El conjunto de soluciones es la región del plano común a las tres restricciones dadas: es la región sombreada más obscura. Se trata de una región abierta, con solo dos vértices.

Estos vértices son las soluciones de los sistemas determinados por cada dos rectas. Son:

P: $\begin{cases} -5x+3y=2 \\ x-2y=-6 \end{cases} \Rightarrow P = (2, 4)$; Q: $\begin{cases} x-2y=-6 \\ 2x+3y=37 \end{cases} \Rightarrow Q = (8, 7)$.

b) Para regiones abiertas, la solución óptima, si existe, se da en el borde de dicha región; en particular en alguno de los vértices anteriores.
El valor de $F(x,y)=-2x+5y$ en esos puntos es:
En P, $F(2,4)=-2\cdot 2+5\cdot 4=16$;
En Q, $F(8,7)=-2\cdot 8+5\cdot 7=19$.
Así pues, el máximo buscado es 19 y se alcanza en el punto $Q(8, 7)$.

Comprobación mediante las rectas de nivel.
Las rectas de nivel asociadas a $F(x,y)=-2x+5y$ son las de ecuación $-2x+5y=k$, donde k indica el nivel. Todas esas rectas son paralelas: trasladándolas a izquierda o derecha varía el valor de k. En este caso, trasladándola hacia arriba el nivel aumenta. Como el punto más alto (de la región factible y perteneciente a una de esas rectas) es Q, en él se tendrá el máximo buscado.
La ecuación de esa recta más "alta" es $-2x+5y=19$.

3. (Selectividad, Cantabria 16)
(2 puntos) El coste de producción de x unidades mensuales de un determinado producto es $C(x)=\frac{x^2}{2}+25x+25$, y el precio de venta de cada unidad es $70-\frac{x}{3}$ euros. Halla el número de unidades que deben venderse mensualmente para que el beneficio sea máximo. ¿A cuánto asciende dicho beneficio? ¿Y los ingresos?
Solución:
El beneficio es igual a los ingresos menos los gastos.
Si el precio de venta de cada unidad es $70-\frac{x}{3}$, los ingresos por la venta de x unidades serán:

$$I(x)=x\cdot\left(70-\frac{x}{3}\right)=70x-\frac{x^2}{3}.$$

Como la función de costes es $C(x)=\frac{x^2}{2}+25x+25$, entonces, la función de beneficios será:

$$B(x)=I(x)-C(x)=70x-\frac{x^2}{3}-\left(\frac{x^2}{2}+25x+25\right)\Rightarrow B(x)=-\frac{5}{6}x^2+45x-25$$

El beneficio máximo se da en la solución de $B'(x)=0$ que haga negativa a $B''(x)$.

$$B'(x)=-\frac{5}{3}x+45=0\Rightarrow x=27.$$

Como $B''(x)=-\frac{5}{3}$, para $x = 27$ se obtiene el beneficio máximo.

Ese beneficio máximo es $B(27)=-\frac{5}{6}\cdot 27^2+45\cdot 27-25=582,5$ €.

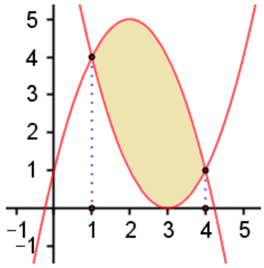
Los ingresos ascienden a $I(27)=70\cdot 27-\frac{27^2}{3}=1647$ €.

4. (1,5 puntos) Determina el área finita de la región del plano comprendida entre las dos parábolas $y=-x^2+4x+1$ e $y=x^2-6x+9$.

<u>Solución</u>:

Cálculo del punto de corte de las parábolas:

$$-x^2+4x+1=x^2-6x+9 \Rightarrow 2x^2-10x+8=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=1;\ x=4.$$



La región es la sombreada en la figura adjunta.

El área viene dada por:

$$S=\int_1^4\left((-x^2+4x+1)-(x^2-6x+9)\right)dx=\int_1^4\left(-2x^2+10x-8\right)dx=$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+5x^2-8x\right]_1^4=-\frac{128}{3}+80-32-\left(-\frac{2}{3}+5-8\right)=9\ \text{u}^2.$$

5. (Selectividad, Canarias 16)

Del alumnado que se matricula en la universidad, el 60 % acaba la carrera elegida y, de éstos, el 45 % son chicos. Además, el 25 % cambia de carrera, de los que el 30% son chicas, y el 15 % deja los estudios, de los que el 50 % son chicos.

a) (0,5 puntos) Construir un diagrama de árbol.

b) (0,5 puntos) Elegido un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea chico?

c) (0,5 puntos) Elegido un chico al azar, ¿cuál es la probabilidad de que cambie de carrera?

<u>Solución</u>:

a) Sean los sucesos:

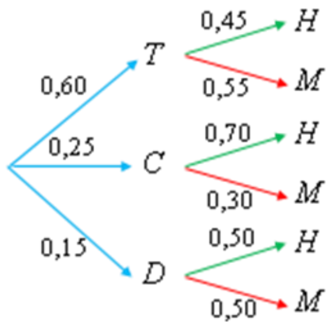
T = acabar la carrera; C = cambiar de carrera; D = dejar los estudios;

H = chico; M = chica.

Se conocen las siguientes probabilidades:

$$P(T)=0,60; P(H/T)=0,45 \Rightarrow P(M/T)=0,55;$$
$$P(C)=0,25; P(M/C)=0,30 \Rightarrow P(H/C)=0,70;$$
$$P(D)=0,15; P(H/D)=0,50 \Rightarrow P(M/D)=0,50.$$

El diagrama de árbol correspondiente es el adjunto.



b) Por la probabilidad total:

$$P(H)=P(T)\cdot P(H/T)+P(C)\cdot P(H/C)+P(D)\cdot P(H/D) \Rightarrow$$
$$P(H)=0,60\cdot 0,45+0,25\cdot 0,70+0,15\cdot 0,50=0,52.$$

c) Por Bayes:

$$P(C/H)=\frac{P(C)\cdot P(H/C)}{P(H)}=\frac{0,25\cdot 0,70}{0,52}=\frac{175}{520}\approx 0,337.$$

6. (EvAU, La Rioja 17)

El peso de las peras de una cosecha (en Rincón de Soto) sigue una distribución normal con una desviación típica de 25 gramos.

a) (1 punto) Supongamos que tomamos una muestra de 121 peras y obtenemos un peso medio de 150 gramos, determinar un intervalo de confianza al 90 % para la media del peso.

b) (0,5 puntos) ¿Cuál habrá sido el tamaño y la media de una muestra si el intervalo de

confianza al 85% obtenido para la media del peso es (156,4, 163,6)?
<u>Solución</u>:
El intervalo de confianza de la media poblacional, para las muestras de tamaño *n* es:

$$IC = \left(\bar{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \ \bar{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right),$$

siendo: $\bar{x}$, la media de la muestra; σ, la desviación típica de la población; y $Z_{\alpha/2}$, el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza de 1 − α.

En este caso se sabe que: σ = 25; *n* = 121; $\bar{x}$ = 150; 1 – α = 90 % ⇒ $Z_{\alpha/2}$ = 1,645.
Por tanto:

$$IC = \left(150 - 1{,}645\cdot\frac{25}{\sqrt{121}},\ \ 150 + 1{,}645\cdot\frac{25}{\sqrt{121}} \right) \approx (150 - 3{,}74,\ 150 + 3{,}74) =$$

$$= (146{,}26,\ 153{,}74)$$

b) Si el intervalo de confianza fuese (156,4, 163,6), entonces la media habría sido $\bar{x}$ = 160 g (es el punto medio del intervalo, lo que implica un error máximo de 3,6 g); y, como para una confianza del 85 %, $Z_{\alpha/2}$ = 1,44 (en la tabla hay que buscar 1 – α/2 = 1 – (1 – 0,85)/2 = 0,925), se deduce que

$$3{,}6 = 1{,}44\cdot\frac{25}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left(\frac{1{,}44\cdot 25}{3{,}6} \right)^2 = 100$$

El tamaño muestral habrá sido *n* = 100.

Soluciones (Álgebra)

Preguntas **1** y **2**. Vistos. La pregunta **5** está resuelta más atrás.

3. (Propuesto en Selectividad 2006, Castilla y León)
(1,5 puntos) Halla las matrices A cuadradas de orden 2, que verifican la igualdad:

$$A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} A.$$

Solución:

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se desea que:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+b & b \\ c+d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a+c & b+d \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b = a \\ b = b \\ c+d = a+c \\ d = b+d \end{cases} \Rightarrow b = 0;\ a = d;\ c = c$$

La solución del sistema viene en función de dos indeterminadas, a y c. Luego, $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}$.

Una de las matrices es $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, que se obtiene dando los valores $a = 3$ y $c = -2$.

4. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 3 \\ 4 & 1 & -a \end{pmatrix}$, halla:

a) (1 punto) Los valores de a para los que la matriz A posea inversa.
b) (1 punto) La inversa de A para $a = 2$.

Solución:

a) La matriz A posee inversa cuando su determinante sea distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 3 \\ 4 & 1 & -a \end{vmatrix} = -a^2 + 4a - 3 = 0 \Rightarrow a = 1,\ a = 3$$

Por tanto, la matriz A posee inversa cuando $a \neq 1$ y $a \neq 3$.

b) Para $a = 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y $|A| = 1$.

La matriz inversa viene dada por $A^{-1} = \dfrac{(A_{ij})^t}{|A|}$, siendo (A_{ij}) la matriz de los adjuntos de A.

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} -7 & 12 & -8 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Soluciones (Análisis)

1. Dada la función $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, halla:

a) (1 punto) Sus intervalos de crecimiento y crecimiento; y sus extremos relativos, si los tiene.
b) (0,8 puntos) Con la información hallada en el apartado anterior y dando algunos valores haz un esbozo de su gráfica, indicando si tiene alguna asíntota.
c) (0,7 puntos) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x = 1$.
<u>Solución</u>:
a) Derivando:

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}$$

La derivada se anula en $x = 0$, posible máximo o mínimo.

- Para $x < 0$, $f'(x)>0 \Rightarrow$ la función es creciente.
- Para $x > 0$, $f'(x)<0 \Rightarrow$ la función es decreciente.

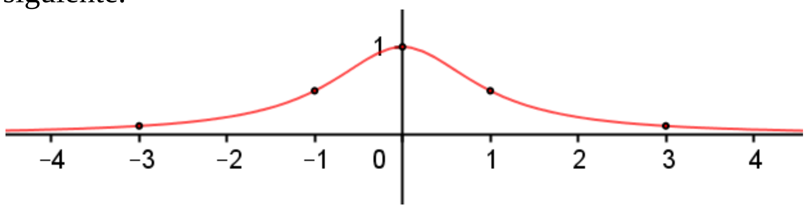
Por tanto, en $x = 0$ se tiene un máximo.

También podría hacerse la derivada segunda: $f'(x)=\dfrac{6x^2-2}{\left(1+x^2\right)^3}$.

Como $f''(0)=-2<0$, en $x = 0$ se tiene un máximo relativo.

b) La función tiene una asíntota horizontal pues: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{1+x^2}=0$. La asíntota es la recta y = 0.

Como $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}>0$ en todo **R**, la curva va por encima de la asíntota.
Algunos puntos: (0, 1), máximo; (–1, 1/2); (1, 1/2); (–3, 0,1); (3, 0,1).
Su gráfica es la siguiente.



c) La ecuación de la recta tangente a una función *f* en el punto $x = 1$ es:
$y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)$.

Como $f(1)=\dfrac{1}{2}$ y $f'(1)=-\dfrac{1}{2}$, la ecuación de la tangente pedida es:

$$y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow y=-\frac{1}{2}x+1$$

2. (Selectividad, Castilla La Mancha 2016)
(2 puntos) Calcula los valores de los parámetros *a*, *b* y *c* en la función $f(x)=ax^3-bx+c$, sabiendo que pasa por el origen de coordenadas y que tiene un máximo relativo en el punto (1, 4).
<u>Solución</u>:

Derivando $f(x)=ax^3-bx+c \Rightarrow f'(x)=3ax^2-b$.
Por pasar por el origen: $f(0)=0 \Rightarrow c=0$.
Por pasar por el punto (1, 4) $\Rightarrow a-b+c=4 \Rightarrow a-b=4$.
Por máximo en (1, 4) $\Rightarrow f'(1)=0 \Rightarrow 3a-b=0$.
Resolviendo $\begin{cases} a-b=4 \\ 3a-b=0 \end{cases} \Rightarrow a=-2,\ b=-6$.
La función es $f(x)=-2x^3+6x$.
Puede comprobarse que en (1, 4) se da un máximo relativo, pues $f''(x)=-12x$, siendo $f''(1)=-12$.

3. (Selectividad, Cantabria 16)
(2 puntos) El coste de producción de x unidades mensuales de un determinado producto es $C(x)=\frac{x^2}{2}+25x+25$, y el precio de venta de cada unidad es $70-\frac{x}{3}$ euros. Halla el número de unidades que deben venderse mensualmente para que el beneficio sea máximo. ¿A cuánto asciende dicho beneficio? ¿Y los ingresos?
Solución:
El beneficio es igual a los ingresos menos los gastos.
Si el precio de venta de cada unidad es $70-\frac{x}{3}$, los ingresos por la venta de x unidades serán:

$$I(x)=x\cdot\left(70-\frac{x}{3}\right)=70x-\frac{x^2}{3}$$

Como la función de costes es $C(x)=\frac{x^2}{2}+25x+25$, entonces, la función de beneficios será:

$$B(x)=I(x)-C(x)=70x-\frac{x^2}{3}-\left(\frac{x^2}{2}+25x+25\right)\Rightarrow B(x)=-\frac{5}{6}x^2+45x-25$$

El beneficio máximo se da en la solución de $B'(x)=0$ que haga negativa a $B''(x)$.

$$B'(x)=-\frac{5}{3}x+45=0\Rightarrow x=27$$

Como $B''(x)=-\frac{5}{3}$, para $x = 27$ se obtiene el beneficio máximo.

Ese beneficio máximo es $B(27)=-\frac{5}{6}\cdot 27^2+45\cdot 27-25=582,5$ €.

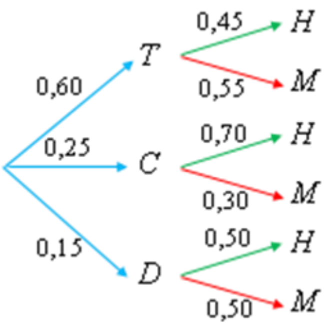
Los ingresos ascienden a $I(27)=70\cdot 27-\frac{27^2}{3}=1647$ €.

4. Resuelta anteriormente.

5. Se resuelve más atrás.

1. (Selectividad, Canarias 16)
Del alumnado que se matricula en la universidad, el 60 % acaba la carrera elegida y, de éstos, el 45 % son chicos. Además, el 25 % cambia de carrera, de los que el 30% son chicas, y el 15 % deja los estudios, de los que el 50 % son chicos.
a) (0,6 puntos) Construir un diagrama de árbol.
b) (0,8 puntos) Elegido un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea chico?
c) (0,6 puntos) Elegido un chico al azar, ¿cuál es la probabilidad de que cambie de carrera?
Solución:
a) Sean los sucesos:
T = acabar la carrera; C = cambiar de carrera; D = dejar los estudios;
H = chico; M = chica.
Se conocen las siguientes probabilidades:

$$P(T) = 0,60; P(H/T) = 0,45 \Rightarrow P(M/T) = 0,55;$$
$$P(C) = 0,25; P(M/C) = 0,30 \Rightarrow P(H/C) = 0,70;$$
$$P(D) = 0,15; P(H/D) = 0,50 \Rightarrow P(M/D) = 0,50.$$



El diagrama de árbol correspondiente es el adjunto.

b) Por la probabilidad total:

$$P(H) = P(T)\cdot P(H/T) + P(C)\cdot P(H/C) + P(D)\cdot P(H/D) \Rightarrow$$
$$P(H) = 0,60\cdot 0,45 + 0,25\cdot 0,70 + 0,15\cdot 0,50 = 0,52.$$

c) Por Bayes:

$$P(C/H) = \frac{P(C)\cdot P(H/C)}{P(H)} = \frac{0,25\cdot 0,70}{0,52} = \frac{175}{520} \approx 0,337.$$

2. (Aragón, septiembre 2017)
En una clase de bachillerato, el 60% de los alumnos aprueban matemáticas, el 50% aprueban inglés y el 30% aprueban las dos asignaturas. Calcule la probabilidad de que un alumno elegido al azar:
a) (0,5 puntos) Apruebe alguna de las dos asignaturas (una o las dos).
b) (0,5 puntos) Apruebe Matemáticas sabiendo que ha aprobado inglés.
Solución:
Sean M e I los sucesos aprobar matemáticas e inglés, respectivamente.
Se sabe que:

$$P(M) = 0,60,\ P(I) = 0,50;\ P(M \cap I) = 0,30.$$

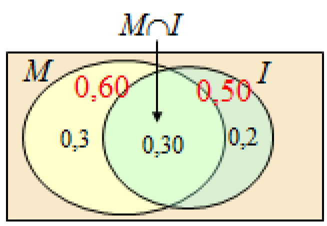
a) Por la probabilidad de la unión de sucesos:

$$P(M \cup I) = P(M) + P(I) - P(M \cap I) = 0,60 + 0,50 - 0,30 = 0,80.$$

b) Por la probabilidad condicionada:

$$P(M/I) = \frac{P(M \cap I)}{P(I)} = \frac{0,30}{0,50} = 0,60.$$

Puede hacerse un diagrama de Venn como el adjunto.



3. Se hacen dos lanzamientos de un dado con seis caras numeradas del 1 al 6, y se consideran los sucesos: A = “la suma de las dos puntuaciones es par” y B = “la primera de las puntuaciones es impar”. Halla:

a) $P(A)$ b) $P(B)$ c) $P(A \cap B)$ d) $P(A \cup B)$.

e) ¿Son independientes los sucesos A y B?

Puntuación: 0,4 puntos cada apartado.

Solución:

a) El espacio muestral está formado por 36 sucesos elementales:

E = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2); …(6, 5), (6, 6)}

El resultado de la suma de los dos dados es el indicado en la siguiente tabla.

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

a) La suma es par en 18 de los 36 sucesos elementales. Por tanto, $P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

b) La primera de las puntuaciones es impar también para 18 de los 36 sucesos elementales. (En la tabla estos sucesos se han coloreado en rojo.) Por tanto, $P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

c) El suceso $A \cap B$ = {(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3) , (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5)}. (Son los sucesos subrayados en rojo).

Por tanto, $P\left(A \cap B\right) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.

d) $P\left(A \cup B\right) = P(A) + P(B) - P\left(A \cap B\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

e) Dos sucesos A y B son independientes cuando $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

En este caso se cumple esa relación, pues $P(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B)$.

Por tanto, los sucesos A y B son independientes.

4. A lo largo de las diferentes pruebas de Selectividad se ha observado que la distribución de las calificaciones en el examen de Matemáticas siguen una ley normal de media 5,7 puntos y desviación típica 1,8.

a) (0,7 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que la nota de un estudiante elegido al azar sea superior a 6,3?

b) (0,8 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra de 49 alumnos tenga una media superior a 6,3 puntos?

Solución:

a) La población es $N(5{,}7,\ 1{,}8)$. Se tipifica haciendo el cambio $Z = \frac{x-5{,}7}{1{,}8}$. Por tanto,

$$P(x > 6{,}3) = P\left(Z > \frac{6{,}3-5{,}7}{1{,}8}\right) = P(Z > 0{,}33) = 1 - P(Z < 0{,}33) = 1 - 0{,}6293 = 0{,}3707.$$

b) Las medias muestrales de tamaño $n = 49$ se distribuyen como una normal $N\left(5{,}7,\ \frac{1{,}8}{\sqrt{49}}\right) \to$ $N(5{,}7,\ 0{,}257)$. Se tipifica haciendo el cambio $Z = \frac{\overline{x}-5{,}7}{0{,}257}$. Por tanto,

$$P(\overline{x} > 6{,}3) = P\left(Z > \frac{6{,}3-5{,}7}{0{,}257}\right) = P(Z > 2{,}33) = 1 - P(Z < 2{,}33) = 1 - 0{,}9901 = 0{,}0099.$$

5. (EvAU, La Rioja 17)
El peso de las peras de una cosecha (en Rincón de Soto) sigue una distribución normal con una desviación típica de 25 gramos.
a) (1 punto) Supongamos que tomamos una muestra de 121 peras y obtenemos un peso medio de 150 gramos, determinar un intervalo de confianza al 90 % para la media del peso.
b) (0,5 puntos) ¿Cuál habrá sido el tamaño y la media de una muestra si el intervalo de confianza al 85% obtenido para la media del peso es (156,4, 163,6)?
Solución:
El intervalo de confianza de la media poblacional, para las muestras de tamaño n es:

$$IC = \left(\overline{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \ \overline{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),$$

siendo: $\overline{x}$, la media de la muestra; σ, la desviación típica de la población; y $Z_{\alpha/2}$, el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza de $1 - \alpha$.

En este caso se sabe que: $\sigma = 25$; $n = 121$; $\overline{x} = 150$; $1 - \alpha = 90\ \% \Rightarrow Z_{\alpha/2} = 1{,}645$.
Por tanto:

$$IC = \left(150 - 1{,}645\cdot\frac{25}{\sqrt{121}},\ \ 150 + 1{,}645\cdot\frac{25}{\sqrt{121}}\right) \approx (150 - 3{,}74,\ 150 + 3{,}74) =$$
$$= (146{,}26,\ 153{,}74)$$

b) Si el intervalo de confianza fuese (156,4, 163,6), entonces la media habría sido $\overline{x} = 160$ g (es el punto medio del intervalo, lo que implica un error máximo de 3,6 g); y, como para una confianza del 85 %, $Z_{\alpha/2} = 1{,}44$ (en la tabla hay que buscar $1 - \alpha/2 = 1 - (1 - 0{,}85)/2 = 0{,}925$), se deduce que

$$3{,}6 = 1{,}44\cdot\frac{25}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left(\frac{1{,}44\cdot 25}{3{,}6}\right)^2 = 100$$

El tamaño muestral habrá sido $n = 100$.

6. Se quiere estimar la proporción de personas que esperan que su situación económica mejore el año próximo. Para ello se ha preguntado a 500 personas de esa población, de las 175 esperan que su situación económica mejore: son optimistas.
a) (1 punto) Calcula un intervalo de confianza para la proporción de personas optimistas en

esta población, con un nivel de confianza del 94%.
b) (1 punto) Si antes de conocer el resultado se quiere determinar un intervalo de confianza con el mismo nivel (94%) y un error máximo de 0,03, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra?

Solución:

a) La proporción de optimistas en la muestra es $\hat{p} = \frac{175}{500} = 0,35$. Por tanto, debe estudiarse como una binomial B(500, 0,35).

En este caso, para el 94% de confianza, $Z_{\alpha/2}$ = 1,88; $\hat{p}$ = 0,35, $\hat{q}$ = 0,65 y n = 500, el intervalo de confianza para estimar la proporción de optimistas será:

$$\left(0,35 - 1,88 \cdot \sqrt{\frac{0,35 \cdot 0,65}{500}},\ \ 0,35 + 1,88 \cdot \sqrt{\frac{0,35 \cdot 0,65}{500}}\right) =$$

= (0,35 – 0,04, 0,35 + 0,04) = (0,31, 0,39).

b) Si no se conoce la proporción de optimistas puede suponerse $p = q = 0,50$.

El error admitido E, viene dado por $E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}$.

Si se desea que $E < 0,03 \Rightarrow 0,03 > 1,88 \cdot \sqrt{\frac{0,5 \cdot 0,5}{n}} \Rightarrow n > 1,88^2 \frac{0,5 \cdot 0,5}{0,03^2} \Rightarrow n > 971,78$

El tamaño mínimo debe ser 972 personas.

Alcalá de Henares, 16 de mayo de 2018.