EXAMEN DE MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS (II) PROBABLIDAD

1. Se consideran los sucesos *A* y *B* de un experimento aleatorio tales que: $P(A) = 0{,}09$; $P(B) = 0{,}07$ y $P\left(\bar{A} \cup \bar{B}\right) = 0{,}97$.

Halla las siguientes probabilidades:

a) (1 punto) $P\left(A \cap B\right)$. b) (0,8 puntos) $P\left(A \cup B\right)$.

c) (0,7 puntos) Justifica si los sucesos *A* y *B* son independientes, o no.

Nota: $\bar{S}$ denota el suceso complementario del suceso *S*.

2. (Aragón, junio 2017). En una urna hay 10 bolas blancas y 3 negras. Se extrae una bola al azar y, sin verla ni reemplazarla, se extrae una segunda bola.
a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola extraída sea negra?
b) (1 punto) Sabiendo que la segunda bola ha sido negra, calcule la probabilidad de que la primera bola extraída fuera negra también.

3. (1,5 puntos) En una moneda trucada la probabilidad de obtener cruz es 0,4. Si se lanza 5 veces, calcula la probabilidad de obtener al menos 2 cruces.

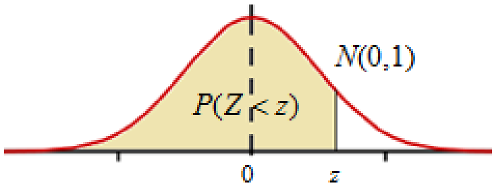
4. (Selectividad, Canarias 2016). En un invernadero que se dedica a la producción de tomates, se ha comprobado que el peso de los tomates sigue una distribución normal con media 100 g y desviación típica 10 g. A la hora de comercializarlos se toman para la clase *A* los comprendidos entre 80 y 120 g. Hallar la probabilidad de que:
a) (0,5 puntos) Elegido un tomate al azar, corresponda a la clase *A*.
b) (1 punto) Elegidos una docena de tomates al azar, su peso medio sea superior a 105 g.

5. (Selectividad, Madrid 2015). La cantidad de fruta, medida en gramos, que contienen los botes de mermelada de una cooperativa con producción artesanal se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica de 10 gramos.
a) (1,5 puntos) Se seleccionó una muestra aleatoria simple de 100 botes de mermelada, y la cantidad total de fruta que contenían fue de 16000 gramos. Determínese un intervalo de confianza al 95% para la media μ.
b) (1 punto) A partir de una muestra aleatoria simple de 64 botes de mermelada se ha obtenido un intervalo de confianza para la media μ con un error de estimación de 2,35 gramos. Determínese el nivel de confianza utilizado para construir el intervalo.

Alcalá de Henares, 4 de mayo de 2018

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo *z*.



Z	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

Examen de Matemáticas Aplicadas CCSS (Probabilidad) Soluciones

1. Se consideran los sucesos *A* y *B* de un experimento aleatorio tales que: *P*(*A*) = 0,09; *P*(*B*) = 0,07 y $P\left(\bar{A}\cup\bar{B}\right)=0{,}97$.

Halla las siguientes probabilidades:

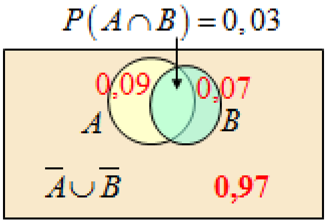
a) (1 punto) $P\left(A\cap B\right)$. b) (0,8 puntos) $P\left(A\cup B\right)$.

c) (0,7 puntos) Justifica si los sucesos *A* y *B* son independientes, o no.

Nota: $\bar{S}$ *denota el suceso complementario del suceso S.*

Solución:

Se dibuja el diagrama de Venn correspondiente:



a) El suceso $\bar{A}\cup\bar{B}=\overline{A\cap B}\Rightarrow P\left(\bar{A}\cup\bar{B}\right)=P\left(\overline{A\cap B}\right)=1-P\left(A\cap B\right)$.

Po tanto:

$$P\left(\bar{A}\cup\bar{B}\right)=1-P\left(A\cap B\right)=0{,}97\Rightarrow P\left(A\cap B\right)=0{,}03.$$

b) $P\left(A\cup B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(A\cap B\right)\Rightarrow P\left(A\cup B\right)=0{,}09+0{,}07-0{,}03=0{,}13$.

c) Dos sucesos *A* y *B* son independientes cuando $P\left(A\cap B\right)=P\left(A\right)\cdot P\left(B\right)$.

Como $P\left(A\right)\cdot P\left(B\right)=0{,}09\cdot 0{,}07=0{,}0063\neq 0{,}03$, los sucesos no son independientes.

2. (Aragón, junio 2017). En una urna hay 10 bolas blancas y 3 negras. Se extrae una bola al azar y, sin verla ni reemplazarla, se extrae una segunda bola.

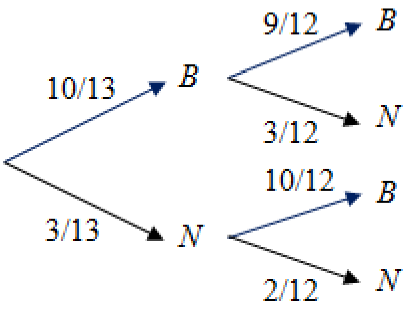
a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola extraída sea negra?

b) (1 punto) Sabiendo que la segunda bola ha sido negra, calcule la probabilidad de que la primera bola extraída fuera negra también.

Solución:

Sean *B* y *N* los sucesos extraer bola blanca o negra.

Con los datos del problema se construye el diagrama de árbol ajunto.



a) La probabilidad de que la segunda bola extraída sea negra es:

$$P\left(2^{a}N\right)=P(1^{a}B)\cdot P\left(2^{a}N/1^{a}B\right)+P(1^{a}N)\cdot P\left(2^{a}N/1^{a}N\right)$$

$$=\frac{10}{13}\cdot\frac{3}{12}+\frac{3}{13}\cdot\frac{2}{12}=\frac{30+6}{156}=\frac{3}{13}.$$

b) Por Bayes, la probabilidad de que la primera bola fuese negra si la segunda bola extraída ha sido negra es:

$$P\left(1^{a}N/2^{a}N\right)=\frac{P(1^{a}N)\cdot P\left(2^{a}N/1^{a}N\right)}{P\left(2^{a}N\right)}=\frac{\frac{3}{13}\cdot\frac{2}{12}}{\frac{3}{13}}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}.$$

3. (1,5 puntos) En una moneda trucada la probabilidad de obtener cruz es 0,4. Si se lanza 5 veces, calcula la probabilidad de obtener al menos 2 cruces.
Solución:
Se trata de una distribución de probabilidad binomial: $B(5, 0,4) \to p = 0,4$; $q = 0,6$.
Si X mide el número cruces obtenidas en los cinco lanzamientos, $P(X = r) = \binom{5}{r} 0,4^r \cdot 0,6^{5-r}$. Por tanto:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - \left(P(X = 0) + P(X = 1)\right) = 1 - \binom{5}{0} 0,4^0 \cdot 0,6^5 - \binom{5}{1} 0,4^1 \cdot 0,6^4 =$$
$$= 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0,6^5 - 5 \cdot 0,4 \cdot 0,6^4 = 1 - 0,07776 - 0,2592 = 0,66304.$$

Nota: El suceso contrario de obtener al menos 2 cruces en 5 lanzamientos de la moneda se cumple al obtener 5 caras o 1 cara y 4 cruces: {*CCCCC*; *CCCCX*; *CCCXC*; *CCXCC*; *CXCCC*; *XCCCC*}.

4. (Selectividad, Canarias 2016). En un invernadero que se dedica a la producción de tomates, se ha comprobado que el peso de los tomates sigue una distribución normal con media 100 g y desviación típica 10 g. A la hora de comercializarlos se toman para la clase *A* los comprendidos entre 80 y 120 g. Hallar la probabilidad de que:
a) (0,5 puntos) Elegido un tomate al azar, corresponda a la clase *A*.
b) (1 punto) Elegidos una docena de tomates al azar, su peso medio sea superior a 105 g.
Solución.
a) La población es $N(100, 10)$. Se tipifica haciendo el cambio $Z = \frac{x-100}{10}$.
Luego:

$$P(80 < x < 120) = P\left(\frac{80-100}{10} < Z < \frac{120-100}{10}\right) = P(-2 < Z < 2) =$$
$$= P(Z < 2) - P(Z < -2) = 0,9772 - (1 - 0,9772) = 0,9544.$$

b) Las medias muestrales de tamaño 12, obtenidas en una población $N(100, 10)$, se distribuyen según una normal $N\left(100,\ \frac{10}{\sqrt{12}}\right) \to N(100,\ 2,89)$. Se tipifica haciendo el cambio $Z = \frac{\bar{X} - 100}{2,89}$.
Por tanto,

$$P(\bar{X} > 105) = P\left(Z > \frac{105-100}{2,89}\right) = P(Z > 1,73) = 1 - P(Z < 1,73) = 1 - 0,9582 = 0,0418.$$

5. (Madrid, septiembre 2015). La cantidad de fruta, medida en gramos, que contienen los botes de mermelada de una cooperativa con producción artesanal se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica de 10 gramos.
a) (1,5 puntos) Se seleccionó una muestra aleatoria simple de 100 botes de mermelada, y la cantidad total de fruta que contenían fue de 16000 gramos. Determínese un intervalo de confianza al 95% para la media μ.
b) (1 punto) A partir de una muestra aleatoria simple de 64 botes de mermelada se ha obtenido un intervalo de confianza para la media μ con un error de estimación de 2,35 gramos. Determínese el nivel de confianza utilizado para construir el intervalo.
Solución:
a) El intervalo de confianza de la media poblacional, para las muestras de tamaño *n* es:

$$IC = \left(\bar{x} - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \ \bar{x} + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right),$$

siendo: $\bar{x}$, la media de la muestra; σ, la desviación típica de la población; y $Z_{\alpha/2}$, el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza de 1 − α.

En este caso: $\bar{x} = \frac{16000}{100} = 160$ gramos; σ = 10 g; n = 100; $Z_{\alpha/2}$ = 1,96 (95% de confianza).

Por tanto:

$$IC = \left(160 - 1{,}96 \cdot \frac{10}{\sqrt{100}},\ \ 160 + 1{,}96 \cdot \frac{10}{\sqrt{100}} \right)$$ = (160 – 1,96, 160 + 1,96) = (158,04, 161,96).

b) El error admitido E, viene dado por $E = Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Para E = 2,35, n = 64 y σ = 10 ⇒ $2{,}35 = Z_{\alpha/2} \cdot \frac{10}{\sqrt{64}}$ ⇒ $Z_{\alpha/2} = \frac{2{,}35 \cdot 8}{10} = 1{,}88$.

Si $Z_{\alpha/2} = 1{,}88$, como $P(Z < 1{,}88) = 0{,}9699$ ⇒ $\frac{\alpha}{2} = 1 - 0{,}9699 = 0{,}0301$ ⇒ α = 0,0602.

El nivel de confianza (1 – α) ha sido del 0,9398 → 93,98 %.

Alcalá de Henares, 4 de mayo de 2018