EXAMEN DE MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS (II)
ANÁLISIS (Integrales), TEMA 8

1. (4,5 puntos) Calcula las siguientes integrales:

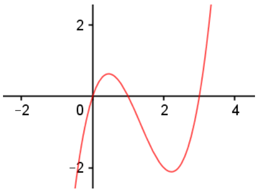
a) (1 punto) $\int \frac{3x-5x^2+3x^3}{x^2}dx$ b) (1 punto) $\int\left(\sin 5x+\frac{1}{2}\cos x\right)dx$

c) (0,8 puntos) $\int\left(x^2-2x\right)^2 dx$ d) (0,5 puntos) $\int \frac{5x}{x^2-1}dx$

e) (0,5 puntos) $\int\left(e^{2x}-2xe^{x^2}\right)dx$ f) (0,7 puntos) $\int\left(x-\sqrt{x}\right)dx$

2. (1 punto) Halla el valor de $\int_0^4 \frac{2x}{\sqrt{x^2+9}}dx$.

3. (Cantabria, junio 18)
(2 puntos) Calcular el área total de la región delimitada por la curva $y=x^3-4x^2+3x$ y el eje *OX*:



4. (Madrid, junio 2015)
(2,5 puntos) Sean las funciones reales de variable real

$f(x)=x^2-6x$ y $g(x)=x-10$

a) (0,7 puntos) Represéntense gráficamente las funciones *f* y *g*.
b) (1,8 puntos) Calcúlese el área del recinto plano acotado por las gráficas de las funciones *f* y *g*.

Alcalá de Henares, 13 de marzo de 2019

Examen de Matemáticas Aplicadas CCSS (Integrales) **Soluciones**

1. (4,5 puntos) Calcula las siguientes integrales:

a) (1 punto) $\int \frac{3x-5x^2+3x^3}{x^2}dx$ b) (1 punto) $\int\left(\sin 5x+\frac{1}{2}\cos x\right)dx$

c) (0,8 puntos) $\int\left(x^2-2x\right)^2 dx$ d) (0,5 puntos) $\int \frac{5x}{x^2-1}dx$

e) (0,5 puntos) $\int\left(e^{2x}-2xe^{x^2}\right)dx$ f) (0,7 puntos) $\int\left(x-\sqrt{x}\right)dx$

Solución:

a) Se escribe el integrando como se indica:

$$\int \frac{3x-5x^2+3x^3}{x^2}dx = \int\left(\frac{3x}{x^2}-\frac{5x^2}{x^2}+\frac{3x^3}{x^2}\right)dx = \int\left(\frac{3}{x}-5+3x\right)dx = 3\ln x-5x+\frac{3x^2}{2}+c.$$

b) Ajustando constantes:

$$\int\left(\sin 5x+\frac{1}{2}\cos x\right)dx = \frac{1}{5}\int 5(\sin 5x)\,dx+\frac{1}{2}\int \cos x dx = -\frac{1}{5}\cos 5x+\frac{1}{2}\sin x+c.$$

c) Operando:

$$\int\left(x^2-2x\right)^2 dx = \int\left(x^4-4x^3+4x^2\right)dx = \frac{x^5}{5}-x^4+\frac{4x^3}{3}+c.$$

d) Ajustando constantes:

$$\int \frac{5x}{x^2-1}dx = \frac{5}{2}\int \frac{2x}{x^2-1}dx = \frac{5}{2}\ln\left(x^2-1\right)+c.$$

e) Ajustando constantes:

$$\int\left(e^{2x}-2xe^{x^2}\right)dx = \frac{1}{2}\int 2e^{2x}dx-\int\left(2xe^{x^2}\right)dx = \frac{1}{2}e^{2x}-e^{x^2}+c.$$

f) $\int\left(x-x^{1/2}\right)dx = \frac{x^2}{2}-\frac{x^{3/2}}{3/2}+c = \frac{x^2}{2}-\frac{2x^{3/2}}{3}+c.$

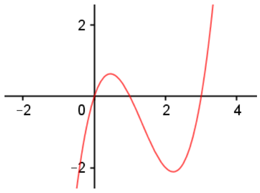
2. (1 punto) Halla el valor de $\int_0^4 \frac{2x}{\sqrt{x^2+9}}dx$.

Solución:

$$\int_0^4 \frac{2x}{\sqrt{x^2+9}}dx = 2\int_0^4 \frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}}dx = 2\left(\sqrt{x^2+9}\right)\Big|_0^4 = 2\left(\sqrt{25}-\sqrt{9}\right) = 2\cdot 2 = 4.$$

3. (Cantabria, junio 18)

(2 puntos) Calcular el área total de la región delimitada por la curva $y = x^3 - 4x^2 + 3x$ y el eje OX:



Solución:

La curva $y = x^3 - 4x^2 + 3x$ corta al eje OX en las soluciones de la ecuación $x^3 - 4x^2 + 3x = 0$.

Como

$$x^3 - 4x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x\left(x^2 - 4x + 3\right) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x-3) = 0,$$

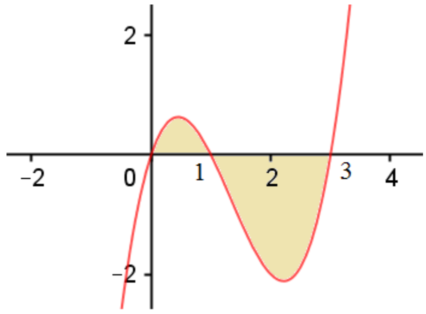
los puntos de corte con el eje OX son $x = 0$, $x = 1$ y $x = 3$.

Por tanto, el área pedida, la sombreada en la figura, viene dada por:

$$S = \int_0^1 \left(x^3 - 4x^2 + 3x\right) dx - \int_1^3 \left(x^3 - 4x^2 + 3x\right) dx \Rightarrow$$

$$S = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 - \left(\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right)\Bigg|_1^3 =$$

$$= \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2}\right) - \left[\left(\frac{81}{4} - 36 + \frac{27}{2}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2}\right)\right] = \frac{37}{12} \text{ u}^2.$$



4. (Madrid, junio 2015)

(2,5 puntos) Sean las funciones reales de variable real

$$f(x) = x^2 - 6x \quad \text{y} \quad g(x) = x - 10$$

a) (0,7 puntos) Represéntense gráficamente las funciones *f* y *g*.

b) (1,8 puntos) Calcúlese el área del recinto plano acotado por las gráficas de las funciones *f* y *g*.

Solución:

a) $f(x) = x^2 - 6x$ es una parábola. Puede trazarse dando algunos puntos de ella. Por ejemplo: (0, 0); (1, –5); (2, –8); (3, 9), es su vértice; (6, 0); (7, 7).

$\to$ $g(x) = x - 10$ es una recta. Dos de sus puntos son (0, –10) y (8, –2).

Se obtienen las gráficas de la figura adjunta.

b) El recinto acotado es el sombreado en la figura.

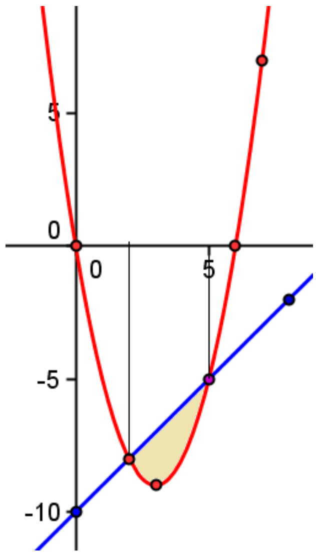
La recta y la curva se cortan cuando

$$x^2 - 6x = x - 10 \Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow x = 2;\ x = 5$$

Por tanto, el área pedida viene dada por la integral definida:

$$\int_2^5 \left(x - 10 - (x^2 - 6x)\right) dx = \int_2^5 \left(-x^2 + 7x - 10\right) dx =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 10x\right)\Bigg|_2^5 = -\frac{125}{3} + \frac{175}{2} - 50 - \left(-\frac{8}{3} + 14 - 20\right) = \frac{9}{2} \text{ u}^2.$$



Alcalá de Henares, 13 de marzo de 2019