EXAMEN DE MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS (II)
ANÁLISIS (Integrales), TEMA 8

1. (3,5 puntos) Calcula las siguientes integrales:

a) (1 punto) $\int \frac{2x - x^2 + 3x^3}{x^4} dx$ b) (1 punto) $\int \left(\sin 2x - \frac{1}{3}\cos 5x \right) dx$

c) (0,5 puntos) $\int x\left(4 - 4x^2\right) dx$ d) (0,5 puntos) $\int \frac{x^2}{x^3 + 2} dx$

e) (0,5 puntos) $\int x e^{-3x^2+1} dx$

2. (1,5 puntos) Calcula $\int \frac{x+8}{x^2 + x - 2} dx$.

3. (1 punto) Halla el valor de $\int_2^3 \frac{9}{\sqrt{3x-5}} dx$.

4. (2 puntos) Halla el área encerrada entre la gráfica de la función $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$ y el eje *OX*.

5. (2 puntos) Halla el área de región plana encerrada entre la parábola $f(x) = -x^2 + 5$ y la recta $y = -x - 1$.

Alcalá de Henares, 14 de marzo de 2018

Examen de Matemáticas Aplicadas CCSS (Integrales) **Soluciones**

1. (3,5 puntos) Calcula las siguientes integrales:

a) (1 punto) $\int \frac{2x - x^2 + 3x^3}{x^4} dx$ b) (1 punto) $\int \left(\sin 2x - \frac{1}{3}\cos 5x \right) dx$

c) (0,5 puntos) $\int x(4 - 4x^2)dx$ d) (0,5 puntos) $\int \frac{x^2}{x^3 + 2} dx$

e) (0,5 puntos) $\int xe^{-3x^2+1}dx$

Solución:

a) Se escribe el integrando como se indica:

$$\int \frac{2x - x^2 + 3x^3}{x^4}dx = \int \left(\frac{2x}{x^4} - \frac{x^2}{x^4} + \frac{3x^3}{x^4} \right)dx = \int \left(2x^{-3} - x^{-2} + \frac{3}{x} \right)dx = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 3\ln x + c$$

b) Ajustando constantes:

$$\int \left(\sin 2x - \frac{1}{3}\cos 5x \right)dx = \frac{1}{2}\int 2\sin 2x dx - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}\int 5\cos 5x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{15}\sin 5x + c .$$

c) Operando:

$$\int x(4 - 4x^2)dx = \int (4x - 4x^3)dx = 2x^2 - x^4 + c$$

d) Ajustando constantes:

$$\int \frac{x^2}{x^3 + 2}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{x^3 + 2}dx = \frac{1}{3}\ln(x^3 + 2) + c$$

e) Ajustando constantes:

$$\int xe^{-3x^2+1}dx = -\frac{1}{6}\int \left(-6xe^{-3x^2+1}\right)dx = -\frac{1}{6}e^{-3x^2+1} + c .$$

2. (1,5 puntos) Calcula $\int \frac{x+8}{x^2 + x - 2} dx$.

Solución:

Debe hacerse por el método de descomposición en fracciones simples.

Como las raíces del denominador, $x^2 + x - 2 = 0$, son x = 1 y x = –2: $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$, se tiene la igualdad:

$$\frac{x+8}{x^2 + x - 2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + B(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

Luego:

$$x + 8 = A(x+2) + B(x-1) \Rightarrow \begin{cases} 1 = A + B \\ 8 = 2A - B \end{cases} \Rightarrow A = 3; B = -2 \to \frac{x+8}{x^2 + x - 2} = \frac{3}{x-1} + \frac{-2}{x+2} .$$

Con esto:

$$\int \frac{x+8}{x^2 + x - 2}dx = \int \frac{3}{x-1}dx + \int \frac{-2}{x+2}dx = 3\ln(x-1) - 2\ln(x+2) + c$$

3. (1 punto) Halla el valor de $\int_2^3 \frac{9}{\sqrt{3x-5}}dx$.

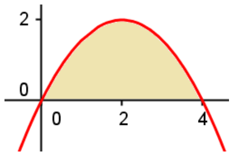
Solución:

$$\int_2^3 \frac{9}{\sqrt{3x-5}}dx = 2\cdot 3\cdot \int_2^3 \frac{3}{2\sqrt{3x-5}}dx = 6\left(\sqrt{3x-5}\right)\Big|_2^3 = 6\left(\sqrt{4}-\sqrt{1}\right) = 6.$$

4. (2 puntos) Halla el área encerrada entre la gráfica de la función $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$ y el eje *OX*.

Solución:

La función $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$ corta al eje *OX* en las soluciones de la ecuación $-\frac{1}{2}x^2 + 2x = 0 \Rightarrow -x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x(4-x) = 0 \Rightarrow x = 0$ y $x = 4$.

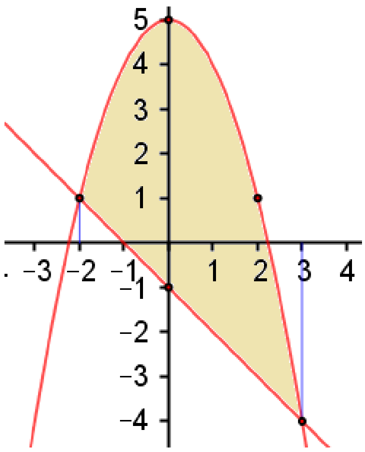


Su gráfica es la adjunta.
El área pedida es la de la región sombreada. Su valor es:

$$A = \int_0^4 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x\right)dx = \left[-\frac{x^3}{6} + x^2\right]_0^4 = -\frac{64}{6} + 16 = \frac{16}{3} \text{ u}^2.$$

5. (2 puntos) Halla el área de región plana encerrada entre la parábola $f(x) = -x^2 + 5$ y la recta $y = -x - 1$.

Solución:



La representación gráfica de ambas funciones se da en la figura adjunta. La región comprendida entre ellas es la sombreada.
Los puntos de corte se obtienen resolviendo ecuación

$$-x^2 + 5 = -x - 1 \Rightarrow -x^2 + x + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot(-1)\cdot 6}}{2\cdot(-1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{-2} = \begin{cases} -2 \\ 3 \end{cases} \quad y = 2x - 1.$$

Su área se obtiene calculando la integral:

$$\int_{-2}^3 \left(-x^2 + 5 - (-x-1)\right)dx = \int_{-2}^3 \left(-x^2 + x + 6\right)dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x\right]_{-2}^3 = -\frac{3^3}{3} + \frac{3^2}{2} + 6\cdot 3 - \left(-\frac{(-2)^3}{3} + \frac{(-2)^2}{2} + 6\cdot(-2)\right) =$$

$$= -9 + \frac{9}{2} + 18 - \left(\frac{8}{3} + 2 - 12\right) = 19 + \frac{9}{2} - \frac{8}{3} = \frac{125}{6} \text{ u}^2$$

Alcalá de Henares, 14 de marzo de 2018