EXAMEN DE MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS (II)
ANÁLISIS → Recuperación

1. (1 punto) ¿Puede la función $f(x)=\begin{cases} a+\ln(1-x), & \text{si } x<0 \\ x^2e^{-x}, & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$ ser continua en toda la recta real para algún valor de a?

2. (1 punto) Deriva las siguientes funciones. Simplifica el resultado y calcula en cada caso $f'(-1)$, si existe.

a) $f(x)=\dfrac{2x^3-3x}{x^2-1}$ b) $f(x)=x^2e^{2x-2}$

3. (1 punto) Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$ en el punto (0, f(0)).

4. Se considera la función real de variable real $f(x)=\dfrac{x^2-1}{3x-2}$.

a) (1,5 puntos) Estudia sus asíntotas.
b) (1 punto) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

5. (2 puntos) El volumen de agua (en millones de litros) almacenado en un embalse a lo largo de un periodo de 11 años en función del tiempo t (en años) viene dado por la función

$$f(t)=t^3-24t^2+180t+8000,\ 0\leq t\leq 11$$

Calcula:
a) (0,25 puntos) La cantidad de agua almacenada en el último año (t = 11).
b) (1,5 puntos) El año del periodo en el que el volumen almacenado fue máximo.
c) (0,25 puntos) El volumen máximo que tuvo el embalse a lo largo de ese periodo.

6. (1,5 puntos) Calcula $\int\left(7e^{3x}+\dfrac{4}{3}x^2-3\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}\right)dx$.

7. (1,5 puntos) Haz la representa gráfica de la función $f(x)=x^2-2x+3$. Calcula el área limitada por la curva de f y el eje OX entre x = 1 y x = 2.

Alcalá de Henares, 21 de marzo de 2018

Soluciones:

---

1. (1 punto) ¿Puede la función $f(x)=\begin{cases} a+\ln(1-x), & \text{si } x<0 \\ x^2e^{-x}, & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$ ser continua en toda la recta real para algún valor de a?

Solución:
Por separado, para cada intervalo de definición, las funciones dadas son continuas. El único punto conflictivo es $x = 0$, en donde las funciones difieren a izquierda y derecha. (Observa que $\ln(1-x)$ está definida para valores de $x < 1$).
Será continua en $x = 0$ cuando los límites laterales sean iguales.
Por la izquierda:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(a+\ln(1-x)\right)=a+\ln 1=a$$

Por la derecha:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x^2e^{-x}=0\cdot 1=0$$

Luego, si $a = 0$ la función dada será continua en toda la recta real.

2. (1 punto) Deriva las siguientes funciones. Simplifica el resultado y calcula en cada caso $f´(-1)$, si existe.

a) $f(x)=\dfrac{2x^3-3x}{x^2-1}$ b) $f(x)=x^2e^{2x-2}$

Solución:
a) $f(x)=\dfrac{2x^3-3x}{x^2-1} \Rightarrow f´(x)=\dfrac{(6x^2-3)(x^2-1)-2x\cdot(2x^3-3x)}{(x^2-1)^2}=\dfrac{2x^4-3x^2+3}{(x^2-1)^2} \to f´(-1)$ no existe: la función no está definida en ese punto.

b) $f(x)=x^2e^{2x-2} \Rightarrow f´(x)=2xe^{2x-2}+2x^2e^{2x-2}=2x(1+x)e^{2x-2} \to f´(-1)=0$.

3. (1 punto) Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$ en el punto (0, f(0)).
Solución:
La ecuación de la recta pedida es: $y-f(0)=f´(0)(x-0)$

$$f(x)=x\sqrt{4-x^2} \Rightarrow f´(x)=\sqrt{4-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} \Rightarrow f(0)=0;\ f´(0)=2.$$

La recta tangente será: $y-0=2(x-0) \Rightarrow y=2x$.

4. (Selectividad Madrid, septiembre 17)
Se considera la función real de variable real $f(x)=\dfrac{x^2-1}{3x-2}$.
a) (1,5 puntos) Estúdiense sus asíntotas.
b) (1 punto) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.
Solución:

a) El denominador de la función se anula en el punto $x=\frac{2}{3}$. Para ese valor se tiene asíntota vertical, pues:

$$\lim_{x\to 2/3}\frac{x^2-1}{3x-2}=\left[\frac{-5/9}{0}\right]=\pm\infty .$$

Las asíntotas es la recta $x=\frac{2}{3}$.

También tiene una asíntota oblicua, pues el grado del numerador supera en 1 al grado del denominador. Puede obtenerse mediante límites.
Si la asíntota es la recta $y=mx+n$, se tendrá que:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2-1}{3x-2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-2x}=\frac{1}{3};$$

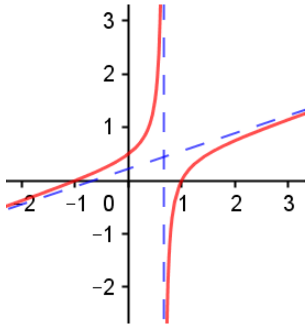
$$n=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{3x-2}-\frac{1}{3}x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-3}{3(3x-2)}-\frac{3x^2-2x}{3(3x-2)}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{9x-6}\right)=\frac{2}{9}.$$

La asíntota oblicua es la recta $y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}$.

b) Derivando:

$$f(x)=\frac{x^2-1}{3x-2}\Rightarrow f´(x)=\frac{2x(3x-2)-(x^2-1)\cdot 3}{(3x-2)^2}=\frac{3x^2-4x+3}{(3x-2)^2}$$

$\to f´(x)\neq 0$ en todos los puntos de su dominio. En numerador, $3x^2-4x+3>0$ para todo $x\neq\frac{2}{3}$. Por tanto, la función es creciente en todo su dominio.



Aunque no se pide, para una mejor interpretación del resultado, se adjunta su gráfica.

5. (Selectividad Murcia, junio 17)
El volumen de agua (en millones de litros) almacenado en un embalse a lo largo de un periodo de 11 años en función del tiempo *t* (en años) viene dado por la función

$$f(t)=t^3-24t^2+180t+8000,\quad 0\leq t\leq 11$$

Calcular:
a) La cantidad de agua almacenada en el último año (t = 11). (0,25 puntos)
b) El año del periodo en el que el volumen almacenado fue máximo. (1,5 puntos)
c) El volumen máximo que tuvo el embalse a lo largo de ese periodo. (0,25 puntos)
<u>Solución</u>:
a) Para t = 11, $f(11)=11^3-24\cdot 11^2+180\cdot 11+8000=8407$ (millones de litros).

b) Derivando dos veces:

$$f(t)=t^3-24t^2+180t+8000\Rightarrow f´(t)=3t^2-48t+180\Rightarrow f´´(t)=6t-48.$$

En los valores máximos o mínimos debe cumplirse que $f´(t)=0$.

$$3t^2-48t+180=0 \Rightarrow t=\frac{48\pm\sqrt{40^2-4\cdot 3\cdot 180}}{6}=\frac{48\pm 12}{6}=\begin{cases}6\\10\end{cases}.$$

Como $f''(6)=6\cdot 6-48<0$, para el valor t = 6 se tiene el máximo de f.
(Para t = 10, al ser $f''(10)=6\cdot 10-48>0$, se dará el mínimo de f).

c) El volumen máximo que tuvo el embalse a lo largo de ese periodo fue

$$f(6)=6^3-24\cdot 6^2+180\cdot 6+8000=8432 \text{ (millones de litros)}$$

6. (1,5 puntos) Calcula $\int\left(7e^{3x}+\frac{4}{3}x^2-3\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)dx$.

<u>Solución</u>:

$$\int\left(7e^{3x}+\frac{4}{3}x^2-3\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)dx = \int 7e^{3x}dx+\int\frac{4}{3}x^2dx+\int\left(-3\sqrt{x}\right)dx+\int\frac{1}{x}dx=$$

$$=\frac{7}{3}\int 3e^{3x}dx+\frac{4}{9}\int 3x^2dx+\int\left(-3\sqrt{x}\right)dx+\int\frac{1}{x}dx = \frac{7}{3}e^{3x}+\frac{4}{9}x^3-2\sqrt{x^3}+\ln x+c.$$

$\rightarrow$ La única primitiva que presenta una ligera dificultad es $\int\left(-3\sqrt{x}\right)dx$.

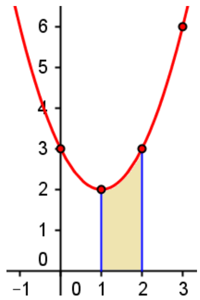
Puede hacerse como sigue:

$$\int\left(-3\sqrt{x}\right)dx=-3\int x^{1/2}dx=-3\cdot\frac{x^{3/2}}{3/2}=-2x^{3/2}=-2\sqrt{x^3}.$$

7. (1,5 puntos) Haz la representa gráfica de la función $f(x)=x^2-2x+3$. Calcula el área limitada por la curva de f y el eje OX entre x = 1 y x = 2.

<u>Solución</u>:

La función $f(x)=x^2-2x+3$ es una parábola. Su mínimo se da cuando $f'(x)=2x-2=0$; cuando x = 1, punto (1, 2).
Otros puntos de f son: (0, 3); (2, 3); (3, 6).
Su gráfica es la adjunta.



El área pedida es la de la región sombreada, y vale:

$$A=\int_1^2\left(x^2-2x+3\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right]_1^2=\frac{8}{3}-4+6-\left(\frac{1}{3}-1+3\right)=\frac{7}{3}\text{ u}^2.$$

Alcalá de Henares, 21 de marzo de 2018