EXAMEN DE MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS (II) ANÁLISIS, TEMAS 5, 6 y 7 (Recuperación)

1. (1 punto) Halla el valor del límite: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-3}{2x-3}-\frac{x^2+5x}{x+2}\right)$.

2. (Castilla y León, junio 17)

La función $f(x)=\begin{cases} 20x^2-20x+32 & 0<x\le 1 \\ \frac{90x-45}{x+8}+27 & x>1 \end{cases}$ representa el beneficio, en miles de euros, de cierta empresa transcurridos x meses.

a) (1 punto) Estudia razonadamente la continuidad de la función $f(x)$.

b) (1 punto) Halla los intervalos donde se produce un aumento del beneficio y una disminución del beneficio. ¿En qué momento el beneficio es mínimo?

c) (0,5 puntos) Determina el beneficio de la empresa a muy largo plazo.

3. (Cf. Madrid, junio 17)

a) (0,8 puntos) Halla el valor de la derivada de la función $f(x)=\frac{e^x}{1+x}$ en el punto de abscisa $x = 0$.

b) (0,7 puntos) Teniendo en cuenta el resultado anterior y sin hacer la derivada segunda, ¿podría asegurarse que la función $f(x)=\frac{e^x}{1+x}$ tiene un máximo o un mínimo? Justifica tu respuesta.

c) (1 punto) Estudia las asíntotas de la función $f(x)=\frac{x^3}{1-x^2}$.

4. (1,5 puntos) Halla la ecuación de la recta tangente a la curva dada por la función $f(x)=\frac{6x}{4x^2+1}$ en el punto de abscisa $x = 1$.

5. a) (1,5 puntos) Halla el valor de a para que la función $f(x)=\frac{2x^2}{ax+1}$ tenga un extremo en el punto $x = 1$.

b) (1 punto) Para el caso $a = -2$, determina si la función tiene algún máximo o mínimo.

Alcalá de Henares, 18 de febrero de 2019

Examen de Matemáticas Aplicadas CCSS (Álgebra, Temas 5, 6 y 7) Soluciones

1. (1 punto) Halla el valor del límite: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-3}{2x-3}-\frac{x^2+5x}{x+2}\right)$.

Solución:

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-3}{2x-3}-\frac{x^2+5x}{x+2}\right) = [\infty - \infty]$.

Se transforma como sigue:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-3}{2x-3}-\frac{x^2+5x}{x+2}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(2x^2-3)(x+2)-(2x-3)(x^2+5x)}{(2x-3)(x+2)}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-3x^2+12x-6}{2x^2-x-6}\right) = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-3x^2...}{2x^2...}\right) = -\frac{3}{2}.$$

2. (Castilla y León, junio 17)

La función $f(x)=\begin{cases} 20x^2-20x+32 & 0<x\le 1 \\ \frac{90x-45}{x+8}+27 & x>1 \end{cases}$ representa el beneficio, en miles de euros, de cierta empresa transcurridos *x* meses.

a) (1 punto) Estudia razonadamente la continuidad de la función $f(x)$.

b) (1 punto) Halla los intervalos donde se produce un aumento del beneficio y una disminución del beneficio. ¿En qué momento el beneficio es mínimo?

c) (0,5 puntos) Determina el beneficio de la empresa a muy largo plazo.

Solución:

a) Cada una de las funciones dadas es continua en su dominio de definición.

La única duda se presenta en $x = 1$. Será continua si los límites laterales coinciden con su valor de definición, que es $f(1)=32$.

Por la izquierda: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(20x^2-20x+32\right)=32$.

Por la derecha: $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{90x-45}{x+8}+27\right)=\frac{90-45}{5+8}+27=32$.

La función es continua para todo $x > 0$.

b) Derivando:

$$f'(x)=\begin{cases} 40x-20, & 0<x<1 \\ \frac{765}{(x+8)^2}, & x>1 \end{cases}.$$

La derivada de $f(x)=\frac{90x-45}{x+8}+27 \Rightarrow f'(x)=\frac{90\cdot(x+8)-(90x-45)\cdot 1}{(x+8)^2}=\frac{765}{(x+8)^2}$.

Se estudia el signo de la derivada:

$40x-20=0 \Rightarrow x=0,5$.

- Para los valores de *x* tales que $0 < x < 0,5$, $f'(x)<0 \Rightarrow$ la función decrece en ese intervalo.
- Para $0,5 < x < 1$, $f'(x)>0 \Rightarrow$ la función crece en ese intervalo.

Como la función decrece en el intervalo (0, 0,5) y crece en el intervalo (0,5, 1) se concluye que en el punto $x = 0,5$ la función tiene un mínimo: a mediados del primer mes el beneficio es mínimo.

- Para $x > 1$, $f'(x)=\dfrac{765}{(x+8)^2} > 0$. La función sigue creciendo.

<u>Observación</u>:
Podría exigirse la comprobación de que la función es derivable en el punto $x = 1$, dudoso en principio. Hay que ver que las derivadas laterales son iguales.

Como: $\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(40x-20)=20$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{765}{(x+8)^2}=9,44...\Rightarrow$ La función no es derivable en $x = 1$.

c) A muy largo plazo significa que $x \to +\infty$. En ese caso, el beneficio tiende a:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{90x-45}{x+8}+27\right)=90+27=117 \text{ (miles de euros).}$$

3. (Cf. Madrid, junio 17)

a) (0,8 puntos) Halla el valor de la derivada de la función $f(x)=\dfrac{e^x}{1+x}$ en el punto de abscisa $x = 0$.

b) (0,7 puntos) Teniendo en cuenta el resultado anterior y sin hacer la derivada segunda, ¿podría asegurarse que la función $f(x)=\dfrac{e^x}{1+x}$ tiene un máximo o un mínimo? Justifica tu respuesta.

c) (1 punto) Estudia las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{x^3}{1-x^2}$.

<u>Solución</u>:

a) $f'(x)=\dfrac{e^x(1+x)-e^x}{(1+x)^2}=\dfrac{xe^x}{(1+x)^2}\Rightarrow f'(0)=0$.

b) Para $x < 0$, $f'(x)<0 \Rightarrow$ la función es decreciente.
Para $x > 0$, $f'(x)>0 \Rightarrow$ la función es creciente.
Por tanto, en $x = 0$ la función tiene un mínimo relativo.

c) El denominador de la función $f(x)=\dfrac{x^3}{1-x^2}$ se anula en los puntos $x = -1$ y $x = 1$. Para esos valores se tienen asíntotas verticales, pues:

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^3}{1-x^2}=\left[\frac{-1}{0}\right]=\pm\infty,\quad \lim_{x\to-1}\frac{x^3}{1-x^2}=\left[\frac{1}{0}\right]=\pm\infty.$$

Las asíntotas son las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

También tiene una asíntota oblicua, pues el grado del numerador supera en 1 al grado del denominador.
Puede obtenerse dividiendo:

$$f(x)=\frac{x^3}{1-x^2}=\frac{x^3-x+x}{1-x^2}=\frac{x\left(x^2-1\right)+x}{1-x^2}=\frac{x\left(x^2-1\right)}{1-x^2}+\frac{x}{1-x^2}=-x+\frac{x}{1-x^2}.$$

La asíntota es la recta $y=-x$.

$\to$ Aplicando límites. Si la asíntota es $y=mx+x$ se cumple:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x\left(1-x^2\right)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x-x^3}=-1;$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{1-x^2}+x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-\left(x-x^3\right)}{1-x^2}==\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{1-x^2}=0$$

Luego, la asíntota oblicua es la recta $y=-x$.

4. (1,5 puntos) Halla la ecuación de la recta tangente a la curva dada por la función $f(x)=\dfrac{6x}{4x^2+1}$ en el punto de abscisa x = 1.

Solución:

La recta tangente a la curva dada por la función $y=f(x)$ en el punto de abscisa $x = a$ es:

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

Para $f(x)=\dfrac{6x}{4x^2+1}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{6(1-4x^2)}{(4x^2+1)^2}\to\left(f(1)=\dfrac{6}{5};\ f'(x)=\dfrac{-18}{25}\right)$.

La tangente es:

$$y-\frac{6}{5}=-\frac{18}{25}(x-1)\Leftrightarrow y=-\frac{18}{25}x+\frac{48}{25}.$$

5. a) (1,5 puntos) Halla el valor de a para que la función $f(x)=\dfrac{2x^2}{ax+1}$ tenga un extremo en el punto x = 1.

b) (1 punto) Para el caso a = –2, determina si la función tiene algún máximo o mínimo.

Solución:

a) Derivando:

$$f(x)=\frac{2x^2}{ax+1}\ \Rightarrow\ f'(x)=\frac{4x(ax+1)-2x^2\cdot a}{(ax+1)^2}=\frac{2x(ax+2)}{(ax+1)^2}.$$

Los extremos relativos se dan cuando $f'(x)=0\Rightarrow 2x\left(ax+2\right)=0\Rightarrow x=0;\ ax+2=0,\ x=-\dfrac{2}{a}$.

Si se pide que la función f tenga un extremo en $x = 1 \Rightarrow 1=-\dfrac{2}{a}\Rightarrow a=-2$.

Por tanto: $f(x)=\dfrac{2x^2}{-2x+1}\ \Rightarrow\ f'(x)=\dfrac{-4x^2+4x}{(-2x+1)^2}$, que se anula en x = 1 (y en x = 0).

Como $f'(x)=\dfrac{-4x^2+4x}{(-2x+1)^2}=\dfrac{4x(-x+1)}{(-2x+1)^2}$, puede observarse que:

- a la izquierda x = 1, $f'(x)>0\to$ la función es creciente;
- a la derecha de x = 1, $f'(x)<0\to$ la función es decreciente;

Por tanto, en x = 1 la función tiene un máximo.

b) Para el caso a = –2 la función $f(x)=\dfrac{2x^2}{-2x+1}$, siendo

$f'(x)=\dfrac{-4x^2+4x}{(-2x+1)^2}$, que se anula en x = 0 y en x = 1.

Para determinar si es máximo o mínimo puede hacerse la derivada segunda:

$$f''(x) = \frac{(-8x+4)(-2x+1)^2 - (-4x^2+4x)\cdot 2(-2x+1)\cdot(-2)}{(-2x+1)^4} \Rightarrow$$

$$f''(x) = \frac{(-8x+4)(-2x+1)+4(-4x^2+4x)}{(-2x+1)^3} = \frac{4}{(-2x+1)^3}.$$

Como $f''(0) = 4 > 0$, en el punto $x = 0$ la función tendrá un mínimo.

Como $f''(1) = -4 < 0$, en el punto $x = 1$ la función tendrá un máximo.

Alcalá de Henares, 18 de febrero de 2019