EXAMEN DE MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS (II) ANÁLISIS, TEMAS 5, 6 y 7

1. (1,5 puntos) ¿Qué valor hay que asignar a *a* para que la función $f(x)=\begin{cases} e^{ax}, & \text{si } x \le 0 \\ 2x+1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$ sea derivable en $x = 0$?

2. (1 punto) Halla la ecuación de la recta tangente a de la curva dada por la función $f(x)=\ln(x-3)$ en el punto de abscisa $x = 4$.

3. (Castilla La Mancha, junio 18)
(2 puntos) Dada la función $f(x)=ax^5+bx^3+c$ se pide que calcules los parámetros *a*, *b* y *c* sabiendo que dos de los puntos de inflexión de esta función son: (0, 0) y (1, 7).

4. (Madrid, junio 18)
Se considera la función real de variable real $f(x)=\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$.
a) (1 punto) Calcúlense el dominio y las asíntotas de $f(x)$.
b) (1,5 puntos) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

5. (Cataluña, junio 18)
El número de individuos, en millones, de una población viene determinado por la función $P(t)=\dfrac{5+t^2}{(t+1)^2}$, donde *t* mide el número de años transcurridos.
a) (1,3 puntos) ¿Cuál es la población inicial y la población después de 9 años? ¿A partir de qué momento la población será inferior a un millón de individuos?
b) (0,7 puntos) Con el paso del tiempo, ¿hacia qué valor tenderá el número de individuos de la población?

6. (Murcia, junio 18)
(1,5 puntos) Una empresa fabrica un determinado producto, que vende al precio unitario de 15 euros. La función de costes, que representa el coste (en unidades monetarias) en función del número de unidades de producto, es $C(x)=2x^2-45x+300$, donde *x* es el número de unidades del producto. Hallar el número de unidades que ha de vender para obtener el máximo beneficio, sabiendo que el beneficio es igual al ingreso total obtenido por la venta menos los costes. Calcular el beneficio máximo.

Alcalá de Henares, 7 de febrero de 2019

Examen de Matemáticas Aplicadas CCSS (Álgebra, Temas 5, 6 y 7) Soluciones

1. (1,5 puntos) ¿Qué valor hay que asignar a *a* para que la función $f(x)=\begin{cases} e^{ax}, & \text{si } x\le 0 \\ 2x+1, & \text{si } x>0 \end{cases}$ sea derivable en *x* = 0?

<u>Solución</u>:

→ Primero hay que ver que es continua.

Los límites laterales coinciden con $f(0)=1$, pues:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} e^{ax}=e^{0^-}=1 \text{ y } \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(2x+1)=1.$$

Por tanto, la función es continua en *x* = 0.

→ Derivable:

Salvo en *x* = 0, su derivada es $f'(x)=\begin{cases} ae^{ax}, & \text{si } x<0 \\ 2, & \text{si } x>0 \end{cases}$.

Las derivadas laterales en *x* = 0 valen:

$f'(0^-)=a$ y $f'(0^+)=2$ ⇒ La función es derivable si *a* = 2.

2. (1 punto) Halla la ecuación de la recta tangente a de la curva dada por la función $f(x)=\ln(x-3)$ en el punto de abscisa *x* = 4.

<u>Solución</u>:

La ecuación de la recta tangente a la curva asociada a la función $y=f(x)$ en el punto de abscisa *x* = *a* viene dada por la expresión: $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

$$f(x)=\ln(x-3) \Rightarrow f(4)=\ln 1=0;\ f'(x)=\frac{1}{x-3} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{4-3}=1.$$

La tangente es: $y-0=(x-4) \Rightarrow y=x-4$.

3. (Castilla La Mancha, junio 18)

(2 puntos) Dada la función $f(x)=ax^5+bx^3+c$ se pide que calcules los parámetros *a*, *b* y *c* sabiendo que dos de los puntos de inflexión de esta función son: (0, 0) y (1, 7).

<u>Solución</u>:

Si la función es:

$$f(x)=ax^5+bx^3+c \Rightarrow f'(x)=5ax^4+3bx^2 \Rightarrow f''(x)=20ax^3+6bx.$$

En los puntos de inflexión la derivada segunda vale 0. Por tanto, si (0, 0) y (1, 7) son puntos de inflexión de esa función se tendrá que $f''(0)=0$ y $f''(1)=0$, luego:

- De $f''(0)=0$ no se deduce nada: se obtiene una identidad.
- De $f''(1)=0 \Rightarrow f''(1)=20a+6b=0$.

Como la gráfica de la función pasa por los puntos (0, 0) y (1, 7) ⇒ $f(0)=0$ y $f(1)=7$; luego:

- De $f(0)=0 \Rightarrow c=0$.
- De $f(1)=7 \Rightarrow a+b+c=7 \Rightarrow a+b=7$.

Resolviendo el sistema: $\begin{cases} 20a+6b=0 \\ a+b=7 \end{cases} \Rightarrow a=-3;\ b=10$.

La función dada debe ser $f(x)=-3x^5+10x^3$.

4. (Madrid, junio 18)

Se considera la función real de variable real $f(x)=\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$.

a) (1 punto) Calcúlense el dominio y las asíntotas de $f(x)$.

b) (1,5 puntos) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución:

a) Dominio: **R** – {–1}.

Hay una asíntota vertical en x = –1, ya que:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3}{(x+1)^2}=\frac{-1}{0}=-\infty .$$

(Tanto por la izquierda de x = –1, como por la derecha, la función tenderá a –∞, pues el denominador siempre es positivo).

También tiene una asíntota oblicua: el grado del numerador supera en 1 al grado del denominador.

Si la asíntota es $y=mx+x$ se cumple:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x(x+1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3+2x^2+x}=1\,;$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{(x+1)^2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-\left(x^3+2x^2+x\right)}{x^2+2x+1}==\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2-x}{x^2+2x+1}=-2$$

La asíntota oblicua es la recta $y=x-2$.

Observación: La asíntota también puede obtenerse dividiendo, pues:

$$f(x)=\frac{x^3}{(x+1)^2}=x-2+\frac{3x+2}{(x+1)^2}\,.$$

Con esto se ve fácilmente que:

Hacia –∞, la función se pega a la asíntota por debajo: el término $\dfrac{3x+2}{(x+1)^2}$ es negativo.

Hacia +∞, la función se pega a la asíntota por encima: el término $\dfrac{3x+2}{(x+1)^2}$ es positivo.

b) Derivando:

$$f'(x)=\frac{3x^2\cdot(x+1)^2-x^3\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{3x^2\cdot(x+1)-x^3\cdot 2}{(x+1)^3}=\frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}\to f'(x)=0\Rightarrow x=0\,;\,x=-3.$$

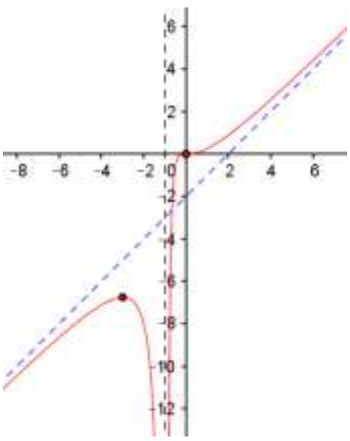
Luego:

Si $x<-3$, como $f'(x)>0$ ⇒ la función es creciente.

Si $-3<x<-1$, $f'(x)<0$ ⇒ la función es decreciente. En x = –3 hay un máximo.

Si $-1<x<0$, $f'(x)>0$ ⇒ la función es creciente.

Si $x>0$, $f'(x)>0$ ⇒ la función es creciente. En x = 0 hay un punto de inflexión.



Aunque no se pide, su gráfica es la adjunta.

5. (Cataluña, junio 18) El número de individuos, en millones, de una población viene determinado por la función $P(t)=\frac{5+t^2}{(t+1)^2}$, donde *t* mide el número de años transcurridos.

a) (1,3 puntos) ¿Cuál es la población inicial y la población después de 9 años? ¿A partir de qué momento la población será inferior a un millón de individuos?
b) (0,7 puntos) Con el paso del tiempo, ¿hacia qué valor tenderá el número de individuos de la población?
Solución:
a) Si el número de individuos, en millones, de una población viene determinado por la función $P(t)=\frac{5+t^2}{(t+1)^2}$, donde *t* mide el número de años transcurridos, entonces:

En el momento inicial: $P(0)=\frac{5+0^2}{(0+1)^2}=5$ millones.

Al cabo de 9 años: $P(9)=\frac{5+9^2}{(9+1)^2}=\frac{86}{100}=0,86$ millones.

La población será inferior a un millón de individuos si

$$P(t)=\frac{5+t^2}{(t+1)^2}<1 \Rightarrow 5+t^2<(t+1)^2 \Rightarrow 5+t^2<t^2+2t+1 \Rightarrow 4<2t \Rightarrow t>2.$$

A partir de $t = 2$ la población será inferior a 1 millón.

b) Con el paso del tiempo la población tenderá a 1 millón de individuos:

$$\lim_{t\to\infty}(P(t))=\lim_{t\to\infty}\frac{5+t^2}{(t+1)^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{5+t^2}{t^2+2t+1}=1.$$

6. (Murcia, junio 18) (1,5 puntos) Una empresa fabrica un determinado producto, que vende al precio unitario de 15 euros. La función de costes, que representa el coste (en unidades monetarias) en función del número de unidades de producto, es $C(x)=2x^2-45x+300$, donde *x* es el número de unidades del producto. Hallar el número de unidades que ha de vender para obtener el máximo beneficio, sabiendo que el beneficio es igual al ingreso total obtenido por la venta menos los costes. Calcular el beneficio máximo.
Solución:
Los ingresos vienen dados por la función $I(x)=15x$ $\rightarrow$ cada unidad se vende a 15 euros.
La función de costes es $C(x)=2x^2-45x+300$.
Los beneficios serán: $B(x)=I(x)-C(x)=15x-(2x^2-45x+300)=-2x^2+60x-300$.
El beneficio máximo se obtiene en la solución de $B'(x)=0$ que haga negativa a $B''(x)$.

Derivando e igualando a cero:

$$B'(x)=-4x+60=0 \rightarrow x=15.$$

Como $B''(x)=-4<0$, para ese valor ($x = 15$) se tiene el máximo beneficio.

El beneficio máximo será: $B(15)=-2\cdot 15^2+60\cdot 15-300=150$ euros.

Alcalá de Henares, 7 de febrero de 2019