EXAMEN DE MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS (II)
ANÁLISIS, TEMAS 5, 6 y 7

1. (Andalucía, junio 17)
a) (1 punto) Calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$f(x)=\frac{e^{5x}-x}{x^2-x}; \quad g(x)=\left(2x^2-x\right)^3\cdot\ln\left(x^3+2\right)$$

b) (1 punto) Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $h(x)=\frac{1}{x}$ en el punto de abscisa $x = 1$.

2. (Aragón, septiembre 17) Los ingresos por ventas (en millones de euros) que obtiene una empresa dependen del gasto que haga en publicidad, de forma que, si gasta x millones de euros, los ingresos por ventas son iguales a: $V(x)=\frac{21x+12}{x+1}$, $x > 0$.
a) (0,4 puntos) Encuentra, si existe, el valor o valores de x para los cuales los ingresos por ventas son iguales a 18 millones de euros.
b) (1,6 puntos) Si el beneficio por ventas viene dado por $B(x)=V(x)-x$, calcula el máximo beneficio que se puede alcanzar. Justifica la respuesta.

3. Para la función $f(x)=\frac{e^x}{1+x}$, determina:
a) (0,7 puntos) Dominio y asíntotas.
b) (0,7 puntos) Crecimiento y decrecimiento; y máximos y mínimos, si los hay.
c) (0,7 puntos) Concavidad y convexidad; y puntos de inflexión, si los hay.
d) (0,4 puntos) Haz un esbozo de su representación gráfica.

4. (Madrid, junio 17) Considérese la función real de variable real: $f(x)=x^3-3x$.
a) (1 punto) Calcúlense $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{1-x^3}$ y $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$.
b) (1 punto) Estúdiense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

Elige una de las dos siguientes preguntas

5. (Cataluña, junio 17)
(1,5 puntos) Considere la función $f(x)=-x^2+bx+c$, con b y c números reales.
Encuentre b y c de forma que la gráfica de la función pase por el punto (–1, 0) y tenga un extremo local en el punto de abscisa $x = 3$. Razone de qué tipo de extremo relativo se trata.

6. Dada la función $f(x)=\begin{cases}3-ax^2 & \text{si } x\le 1\\ \dfrac{2}{ax} & \text{si } x>1\end{cases}$ halla:
a) (0,6 puntos) El valor o valores de a para que f sea continua.
b) (0,9 puntos) El valor o valores de a para que f sea derivable.

Alcalá de Henares, 14 de febrero de 2018

Examen de Matemáticas Aplicadas CCSS (Álgebra, Temas 5, 6 y 7) Soluciones

1. (Andalucía, junio 17)
a) (1 punto) Calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$f(x)=\frac{e^{5x}-x}{x^2-x}; \quad g(x)=\left(2x^2-x\right)^3\cdot\ln\left(x^3+2\right)$$

b) (1 punto) Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $h(x)=\frac{1}{x}$ en el punto de abscisa x = 1.

Solución:

a) $f(x)=\frac{e^{5x}-x}{x^2-x} \Rightarrow f'(x)=\frac{\left(5e^{5x}-1\right)\cdot\left(x^2-x\right)-\left(e^{5x}-x\right)\cdot(2x-1)}{\left(x^2-x\right)^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{5x^2e^{5x}-7xe^{5x}+e^{5x}+x^2}{\left(x^2-x\right)^2}.$$

$\to g(x)=\left(2x^2-x\right)^3\cdot\ln\left(x^3+2\right) \Rightarrow g'(x)=3\left(2x^2-x\right)^2\cdot(4x-1)\cdot\ln\left(x^3+2\right)+\left(2x^2-x\right)^3\cdot\frac{3x^2}{x^3+2}.$

b) La ecuación de la recta tangente es: $y-h(1)=h'(1)\cdot(x-1)$.

Como $h(1)=1$ y $h'(x)=-\frac{1}{x^2}\to h'(1)=-1$, la ecuación pedida será:

$$y-1=-(x-1) \Rightarrow y=-x+2.$$

2. (Aragón, septiembre 17)
Los ingresos por ventas (en millones de euros) que obtiene una empresa dependen del gasto que haga en publicidad, de forma que, si gasta x millones de euros, los ingresos por ventas son iguales a: $V(x)=\frac{21x+12}{x+1}$, $x > 0$

a) (0,4 puntos) Encuentra, si existe, el valor o valores de x para los cuales los ingresos por ventas son iguales a 18 millones de euros.
b) (1,6 puntos) Si el beneficio por ventas viene dado por $B(x)=V(x)-x$, calcula el máximo beneficio que se puede alcanzar. Justifica la respuesta.

Solución:

a) Hay que resolver la ecuación $V(x)=\frac{21x+12}{x+1}=18 \Rightarrow 21x+12=18x+18 \Rightarrow x=2$. Por tanto, para que la empresa obtenga 18 millones de euros de ingresos por ventas deberá gastar 2 millones de euros en publicidad.

b) La función que da el beneficio es: $B(x)=\frac{21x+12}{x+1}-x=\frac{-x^2+20x+12}{x+1}$.

El máximo de esa función se obtiene en la solución de $B'(x)=0$ que haga negativa a $B''(x)$.
Derivando e igualando a 0:

$$B'(x)=\frac{(-2x+20)\cdot(x+1)-\left(-x^2+20x+12\right)}{(x+1)^2}=\frac{-x^2-2x+8}{(x+1)^2} \to -x^2-2x+8=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-4 \\ x=2 \end{cases}.$$

(La solución x = –4 carece de sentido en este contexto).

Como $B''(x)=\dfrac{(-2x-2)\cdot(x+1)^2-(-x^2-2x+8)\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} \to B''(2)=\dfrac{-54}{81}=\dfrac{-2}{3}$, se confirma que para x = 2 se obtiene el máximo buscado. Su valor es $B(2)=\dfrac{21\cdot 2+12}{2+1}-2=16$ (millones).

3. Para la función $f(x)=\dfrac{e^x}{1+x}$, determina:

a) (0,7 puntos) Dominio y asíntotas.
b) (0,7 puntos) Crecimiento y decrecimiento; y máximos y mínimos, si los hay.
c) (0,7 puntos) Concavidad y convexidad; y puntos de inflexión, si los hay.
d) (0,4 puntos) Haz un esbozo de su representación gráfica.

Solución:

a) $f(x)=\dfrac{e^x}{1+x}$ no está definida en x = –1. En ese punto tiene una asíntota vertical, pues:

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{e^x}{1+x}=\dfrac{e^{-1}}{0}=\pm\infty$. Si $x\to -1^-$, $f(x)\to -\infty$; si $x\to -1^+$, $f(x)\to +\infty$.

También tiene una asíntota horizontal hacia –∞, pues $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{e^x}{1+x}=\dfrac{e^{-\infty}}{-\infty}=0^-$.

b) $f'(x)=\dfrac{e^x(1+x)-e^x}{(1+x)^2}=\dfrac{xe^x}{(1+x)^2}$. Se anula en el punto x = 0.

Se cumple que:

$f'(x)<0$ si x < 0, menos x = –1, que no está definida. Decrece en el intervalo $(-\infty,-1)\cup(-1,\ 0)$.

$f'(x)>0$ para x > 0. Creciente.

En x = 0 tiene un mínimo: decrece a su izquierda; cree a su derecha.

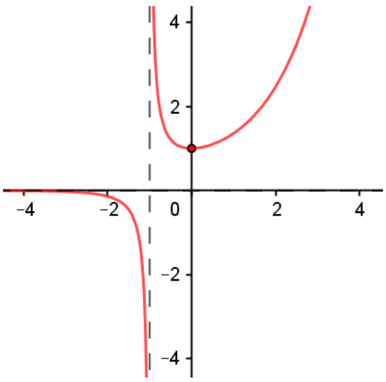
c) $f''(x)=\dfrac{(e^x+xe^x)(1+x)^2-xe^x\cdot 2(1+x)}{(1+x)^4}=\dfrac{(e^x+xe^x)(1+x)-2xe^x}{(1+x)^3}=\dfrac{e^x(x^2+1)}{(1+x)^3}$.

No se anula en ningún punto. No tiene puntos de inflexión.

$f''(x)<0$ si x < –1. Es cóncava (∩) si x < –1.

$f''(x)>0$ si x > –1. Es convexa (∪) si x < –1.

d) Teniendo en cuenta las asíntotas y que el mínimo vale $f(0)=1$ se puede hacer el siguiente esbozo de la función.



4. (Madrid, junio 17)

Considérese la función real de variable real: $f(x)=x^3-3x$.

a) (1 punto) Calcúlense $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{f(x)}{1-x^3}$ y $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$.

b) (1 punto) Estúdiense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

Solución:

a) $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{1-x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-3x}{1-x^3}\to$ dividiendo por $x^3\to\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3}-\frac{3x}{x^3}}{\frac{1}{x^3}-\frac{x^3}{x^3}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{3}{x^2}}{\frac{1}{x^3}-1}=\frac{1-0}{0-1}=-1$.

$\to\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3-3x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(x^2-3\right)=-3$.

b) Derivando:

$f(x)=x^3-3x\Rightarrow f'(x)=3x^2-3\to f'(x)=0$ en los puntos $x=-1$ y $x=1$.

- Si $x<-1$, $f'(x)>0\Rightarrow f(x)$ es creciente.
- Si $-1<x<1$, $f'(x)<0\Rightarrow f(x)$ es decreciente. (Se deduce que en $x=-1$ hay un máximo relativo).
- Si $x>1$, $f'(x)>0\Rightarrow f(x)$ es creciente. (Se deduce que en $x=1$ hay un mínimo relativo).

Elige una de las dos siguientes preguntas

5. (Cataluña, junio 17)
(1,5 puntos) Considere la función $f(x)=-x^2+bx+c$, con b y c números reales.
Encuentre b y c de forma que la gráfica de la función pase por el punto (–1, 0) y tenga un extremo local en el punto de abscisa $x = 3$. Razone de qué tipo de extremo relativo se trata.
Solución:
Si la gráfica de la función $f(x)=-x^2+bx+c$ pasa por el punto (–1, 0) $\Rightarrow f(-1)=0$.
Si, además, tiene un extremo local en el punto de abscisa $x = 3\Rightarrow f'(3)=0$.
Esto es:

$f(-1)=0\Rightarrow -1-b+c=0$; $\quad f'(x)=-2x+b\Rightarrow -6+b=0\to b=6$; $c=7$.

La función es $f(x)=-x^2+6x+7$, cuya gráfica es una parábola cóncava ($\cap$). Por tanto, el extremo relativo es un máximo.
También puede verse haciendo la derivada segunda y comprobar que es negativa.
En efecto: $f''(x)=-2<0$.

6. Dada la función $f(x)=\begin{cases}3-ax^2 & \text{si } x\le 1\\ \dfrac{2}{ax} & \text{si } x>1\end{cases}$ halla:

c) (0,6 puntos) El valor o valores de a para que f sea continua.
d) (0,9 puntos) El valor o valores de a para que f sea derivable.
Solución:
El único punto que presenta dificultades es $x = 1$, que es donde se distinguen las funciones que intervienen.
a) Para que sea continua los límites laterales deben ser iguales.

Si $x\to 1^-$, $f\to 3-a$ $\qquad$ Si $x\to 1^+$, $f\to 2/a$

Como deben ser iguales: $3-a=\frac{2}{a}\Rightarrow a^2-3a+2=0\Rightarrow a=1$ o $a = 2$.
La función es continua en todo **R** si $a = 1$ o $a = 2$.

b) Para que sea derivable deben ser iguales las derivadas laterales en $x = 1$.

Derivando: $f'(x) = \begin{cases} -2ax & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{-2}{ax^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Si $x \to 1^-$, $f' \to -2a$ Si $x \to 1^+$, $f' \to -2/a$

Como deben ser iguales: $-2a = -\dfrac{2}{a} \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$.

Para $a = -1$ la función no es continua, luego el valor que hace la función derivable es $a = 1$.
(Para $a = 2$ la función es continua, pero no derivable).