# EXAMEN DE MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS (II) ÁLGEBRA, TEMAS 3 Y 4

**1**. a) (2 puntos) Discute en función de los valores de *a* el sistema $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x + (1+a)y - az = 2a \\ x + ay + (1+a)z = 1 \end{cases}$.

b) (1,5 puntos) Si es el posible, resuélvelo cuando $a = -1$ y cuando $a = 1$.

**2**. (Cfr. Andalucía, junio 18)
a) (1,5 puntos) Plantee, sin resolver, las restricciones de este problema e indique la función a optimizar: "Un ganadero alimenta a sus ovejas con maíz y pienso. Cada kilogramo de maíz aporta 600 g de hidratos de carbono y 200 g de proteínas, mientras que cada kilogramo de pienso aporta 300 g de hidratos de carbono y 600 g de proteínas. Cada oveja necesita diariamente como mínimo 1800 g de hidratos de carbono y 2400 g de proteínas. Si 1 kg de maíz cuesta 0,50 euros y 1 kg de pienso cuesta 0,25 euros, calcule cuántos kilogramos de cada producto tendría que comprar el ganadero para alimentar cada día a una oveja con un gasto mínimo."

**3**. (Madrid, 2017)
Considérese la región del plano *S* definida por:

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 : x + 6y \geq 6; \quad 5x - 2y \geq -2; \quad x + 3y \leq 20; \quad 2x - y \leq 12 \right\}.$$

a) (2,2 puntos) Represéntese gráficamente la región *S* y calcúlense las coordenadas de sus vértices.
b) (0,8 puntos) Determínense los puntos en los que la función $f(x, y) = 4x - 3y$ alcanza sus valores máximo y mínimo en *S*, indicando el valor de $f(x, y)$ en dichos puntos.

**4**. (Castilla La Mancha, junio 2018) En la bodega de Antonio hay botellas de vino blanco, de vino tinto y de vino rosado. Si sumamos las botellas de vino blanco con las de tinto obtenemos el triple de las botellas de rosado. La suma de las botellas de tinto con las de rosado supera en 40 unidades a las botellas de blanco. Además sabemos que Antonio tiene en su bodega 280 botellas.
a) (1 punto) Plantea un sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántas botellas hay de cada tipo de vino.
b) (1 punto) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior.

Alcalá de Henares, 16 de noviembre de 2018

**Soluciones:**

**1**. a) (2 puntos) Discute en función de los valores de $a$ el sistema $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x + (1+a)y - az = 2a \\ x + ay + (1+a)z = 1 \end{cases}$.

b) (1,5 puntos) Si es el posible, resuélvelo cuando $a$ = –1 y cuando $a$ = 1.

Solución:

a) Las matrices de coeficientes y ampliada son: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1+a & -a & 2a \\ 1 & a & 1+a & 1 \end{array}\right) = M$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1+a & -a \\ 1 & a & 1+a \end{vmatrix} = \begin{matrix} \\ F2-F1 \\ F3-F1 \end{matrix}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & a-1 & -a+1 \\ 0 & a-2 & a+2 \end{vmatrix} = (a-1)(a+2) - (-a+1)(a-2) = 2a(a-1).$$

Por tanto: $|A| = 0$ si $a$ = 0 o $a$ = 1 ⇒ r($A$) = 2; $|A| \neq 0$ si $a \neq 0$ y $a \neq 1$ ⇒ r($A$) = 3.

En consecuencia:

- Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$, r($A$) 3 = r($M$) → Sistema compatible determinado.
- Si $a$ = 0, se tiene: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) = M$. Es evidente que r($A$) = 2: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$.

Por otra parte, como el menor $|M_1| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \Rightarrow$ el rango de $M$ es 3.

En este caso, el sistema será incompatible.

- Si $a$ = 1, $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) = M$. Como $F1 = F2$ ⇒ r($A$) = r($M$) = 2.

En este caso el sistema es compatible indeterminado.

b) Para $a$ = –1, el sistema es compatible determinado. Su solución puede hallarse por sustitución.

Si $a$ = –1, queda: $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x + z = -2 \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 2 \to x + 2(x-1) - (-2-x) = 2 \\ z = -2 - x \\ y = x - 1 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x = 2 \\ z = -2 - x \\ y = x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1/2 \\ y = -1/2 \\ z = -5/2 \end{cases}.$$

Para $a$ = 1, el sistema es compatible indeterminado, equivalente a:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 2 + z \\ x + y = 1 - 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E1-E2 \\ \\ \end{matrix}\begin{cases} y = 1 + 3z \\ x + y = 1 - 2z \end{cases}.$$

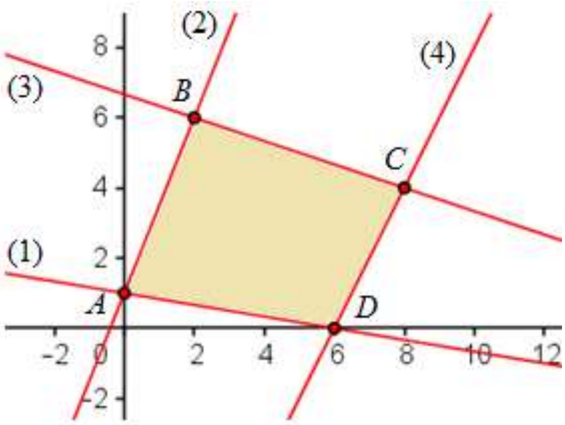
Si se hace $z = t$, su solución es $\begin{cases} x = -5t \\ y = 1 + 3t \\ z = t \end{cases}$.

**2**. (Cfr. Andalucía, junio 18)
a) (1,5 puntos) Plantee, sin resolver, las restricciones de este problema e indique la función a optimizar: "Un ganadero alimenta a sus ovejas con maíz y pienso. Cada kilogramo de maíz aporta 600 g de hidratos de carbono y 200 g de proteínas, mientras que cada kilogramo de pienso aporta 300 g de hidratos de carbono y 600 g de proteínas. Cada oveja necesita diariamente como mínimo 1800 g de hidratos de carbono y 2400 g de proteínas. Si 1 kg de maíz cuesta 0,50 euros y 1 kg de pienso cuesta 0,25 euros, calcule cuántos kilogramos de cada producto tendría que comprar el ganadero para alimentar cada día a una oveja con un gasto mínimo."
Solución:
a) Los datos del problema se pueden organizar en la siguiente tabla:

| Alimento | Kilos | H. carbono (mg/kg) | Proteínas (mg/kg) | Coste |
|---|---|---|---|---|
| Maíz | $x$ | $600x$ | $200x$ | $0{,}50x$ |
| Pienso | $y$ | $300y$ | $600y$ | $0{,}25y$ |
| Necesidades (mg) | | 1800 | 2400 | |

El objetivo es minimizar el gasto: $G(x, y) = 0{,}50x + 0{,}25y$
Sujeto a:
$600x + 300y \geq 1800$;
$200x + 600y \geq 2400$;
$x \geq 0$; $y \geq 0$.

**3**. (Madrid, 2017)
Considérese la región del plano $S$ definida por:
$$S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x + 6y \geq 6;\quad 5x - 2y \geq -2;\quad x + 3y \leq 20;\quad 2x - y \leq 12\}.$$
a) (2,2 puntos) Represéntese gráficamente la región $S$ y calcúlense las coordenadas de sus vértices.
b) (0,8 puntos) Determínense los puntos en los que la función $f(x, y) = 4x - 3y$ alcanza sus valores máximo y mínimo en $S$, indicando el valor de $f(x, y)$ en dichos puntos.
Solución:
a) Se representan cada una de las rectas asociadas a las restricciones y se determina el semiplano solución en cada caso.
(1) $x + 6y \geq 6 \to x + 6y = 6$:
puntos (0, 1) y (6, 0);
semiplano de la derecha (superior).
(2) $5x - 2y \geq -2 \to 5x - 2y = -2$:
puntos (0, 1) y (–2/5, 0);
semiplano de la derecha.
(3) $x + 3y \leq 20 \to x + 3y = 20$:
puntos (0, 20/3) y (20, 0);
semiplano de la izquierda (inferior).
(4) $2x - y \leq 12 \to 2x - y = 12$:
puntos (0, –12) y (6, 0);
semiplano de la izquierda.



Se obtiene la región sombreada en la figura adjunta.
Los vértices $A$(0, 1) y $D$(6, 0) se obtienen al hacer la representación gráfica. Son las soluciones de los sistemas $\begin{cases} x+6y=6 \\ 3x-2y=-2 \end{cases}$ y $\begin{cases} x+6y=6 \\ 2x-y=12 \end{cases}$, respectivamente.
Los otros dos se obtienen resolviendo los sistemas:

$$B: \begin{cases} 5x-2y=-2 \\ x+3y=20 \end{cases} \to B(2,\ 6);\quad C: \begin{cases} x+3y=20 \\ 2x-y=12 \end{cases} \to C(8,\ 4).$$

b) Como la región es un polígono, la solución óptima (máxima o mínima) de cualquier función lineal se encuentra en alguno de sus vértices. Se determina evaluando la función en cada uno de los vértices. En este caso, para $f(x,y)=4x-3y$, se tiene:

En $A$(0, 1) → $f(0,1)=0-3=-3$.

En $B$(2, 6) → $f(2,6)=8-18=-10$.

En $C$(8, 4) → $f(8,4)=32-12=20$.

En $D$(6, 0) → $f(6,0)=24-0=24$.

Por tanto, el mínimo, que vale –10, lo alcanza en el punto $B$(2, 6); el máximo, cuyo valor es 24, lo alcanza en el punto $D$(6, 0).

**4**. (Castilla La Mancha, junio 2018) En la bodega de Antonio hay botellas de vino blanco, de vino tinto y de vino rosado. Si sumamos las botellas de vino blanco con las de tinto obtenemos el triple de las botellas de rosado. La suma de las botellas de tinto con las de rosado supera en 40 unidades a las botellas de blanco. Además sabemos que Antonio tiene en su bodega 280 botellas.
a) Plantea un sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántas botellas hay de cada tipo de vino. (1 punto)
b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (1 punto)
Solución:
a) Sean $x$, $y$, $z$ el número de botellas de vino blanco, tinto y rosado, respectivamente.
Los datos del problema afirman que:

$$\begin{cases} x+y+z=280 \\ x+y=3z \\ y+z=x+40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=280 \\ x+y-3z=0 \\ x-y-z=-40 \end{cases}$$

b) Haciendo trasformaciones de Gauss en el sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=280 \\ x+y-3z=0 \\ x-y-z=-40 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E2-E1 \\ E3+E1 \end{matrix} \begin{cases} x+y+z=280 \\ -4z=-280 \\ 2x=240 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 120+y+70=280 \to y=90 \\ z=70 \\ x=120 \end{cases}$$

Antonio tiene 120 botellas de vino blanco, 90 de vino tinto y 70 de rosado.

Alcalá de Henares, 16 de noviembre de 2018