EXAMEN DE MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS (II)
ÁLGEBRA, TEMAS 3 Y 4

1. (EvAU Madrid, junio 17)
Considérese el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real *a*:

$$\begin{cases} x - ay + 2z = 0 \\ ax - 4y - 4z = 0 \\ (2-a)x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

a) (3 puntos) Discútase en función de los valores del parámetro *a*.
b) (1 punto) Resuélvase para $a = 3$.

2. (Aragón, junio 17)
Una empresa de transporte va a realizar el transporte de animales de compañía entre dos ciudades. Para ello, va a alquilar furgonetas especializadas en este tipo de transporte, que pueden ser de dos tipos, A y B. Cada furgoneta de tipo A tiene 4 jaulas individuales para perros y 3 jaulas individuales para gatos, mientras que cada furgoneta de tipo B tiene 2 jaulas individuales para perros y 6 jaulas individuales para gatos. El coste de alquiler de cada furgoneta de tipo A es de 240 euros y el coste de alquiler de cada furgoneta de tipo B es de 400 euros. Además, por razones comerciales, el número de furgonetas de tipo B debe ser mayor o igual que el número de furgonetas de tipo A. La empresa tiene que garantizar espacio para, al menos, 24 perros y 54 gatos. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántas furgonetas de cada tipo debe alquilar para que el coste sea mínimo. ¿Cuál es el valor de ese coste mínimo?
(Puntuación. Planteamiento, 1,5 puntos; determinación de la región de soluciones, 1,5 puntos. Resultado justificado, 1,5 puntos).

3. (Propuesto en Selectividad 2010, País Vasco)
En la exposición de un establecimiento de material de oficina hay 400 unidades, entre lámparas, sillas y mesas, con un valor total de 15000 €. Si el valor de una lámpara es de 16 €, el de una silla 50 € y el de una mesa 80 €, y, además, hay tantas lámparas como sillas y mesas juntas, ¿cuántas lámparas, sillas y mesas hay en la exposición? (1,5 puntos)

Alcalá de Henares, 22 de noviembre de 2017

Examen de Matemáticas Aplicadas CCSS (Álgebra, Temas 3 y 4) Soluciones

1. (EvAU Madrid, junio 17)
Considérese el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x - ay + 2z = 0 \\ ax - 4y - 4z = 0 \\ (2-a)x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

a) (3 puntos) Discútase en función de los valores del parámetro a.
b) (1 punto) Resuélvase para a = 3.
Solución:
a) Sea A la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & 2 & 0 \\ a & -4 & -4 & 0 \\ 2-a & 3 & -2 & 0 \end{array} \right) = M$$

Puede observarse que se trata de un sistema homogéneo; por tanto, siempre será compatible.
Si el rango de la matriz de A es 3, solo tendrá la solución trivial; cuando su rango sea menor que 3 tendrá infinitas soluciones.

El determinante de A vale

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -a & 2 \\ a & -4 & -4 \\ 2-a & 3 & -2 \end{vmatrix} = 20 + a(-2a + 8 - 4a) + 2(3a + 8 - 4a) = -6a^2 + 6a + 36$$

Este determinante vale 0, $|A| = 0 \Rightarrow -6a^2 + 6a + 36 = 0 \Rightarrow -6(a^2 - a - 6) = 0$, si $a = -2$ o $a = 3$.

Con esto:

- Si $a \neq -2$ y 3 $\Rightarrow$ r(A) = 3. El sistema será compatible determinado: solución $x = y = z = 0$.

- Si $a = -2 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -4 & -4 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. Su rango es 2, pues $\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. El sistema será compatible indeterminado.

- Si $a = 3 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & -4 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. Su rango es 2, pues $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$. El sistema también será compatible indeterminado.

b) Como se ha dicho, si a = 3 el sistema es compatible indeterminado, equivalente a:

$$\begin{cases} 3x - 4y - 4z = 0 \\ -x + 3y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4y = 4z \\ -x + 3y = 2z \end{cases}$$ → (También valdrían las dos primeras ecuaciones)

Puede resolverse por Gauss. Así:

$$\begin{cases} 3x - 4y = 4z \\ -x + 3y = 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 3E2 + E1 \end{matrix} \begin{cases} 3x - 4y = 4z \\ 5y = 10z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 8z = 4z \rightarrow x = 4z \\ y = 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}.$$

2. (Aragón, junio 17)
Una empresa de transporte va a realizar el transporte de animales de compañía entre dos ciudades. Para ello, va a alquilar furgonetas especializadas en este tipo de transporte, que pueden ser de dos tipos, A y B. Cada furgoneta de tipo A tiene 4 jaulas individuales para perros y 3 jaulas individuales para gatos, mientras que cada furgoneta de tipo B tiene 2 jaulas individuales para perros y 6 jaulas individuales para gatos. El coste de alquiler de cada furgoneta de tipo A es de 240 euros y el coste de alquiler de cada furgoneta de tipo B es de 400 euros. Además, por razones comerciales, el número de furgonetas de tipo B debe ser mayor o igual que el número de furgonetas de tipo A. La empresa tiene que garantizar espacio para, al menos, 24 perros y 54 gatos. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántas furgonetas de cada tipo debe alquilar para que el coste sea mínimo. ¿Cuál es el valor de ese coste mínimo?
(Puntuación. Planteamiento, 1,5 puntos; determinación de la región de soluciones, 1,5 puntos. Resultado justificado, 1,5 puntos).
Solución:
Con los datos del problema se forma la siguiente tabla:

Furgoneta	Cantidad	J. Perros	J. Gatos	Coste
A	x	$4x$	$3x$	$240x$
B	y	$2y$	$6y$	$400y$
Necesidades		24	54	

El objetivo es minimizar el coste: $C(x, y) = 240x + 400y$
Sujeto a:

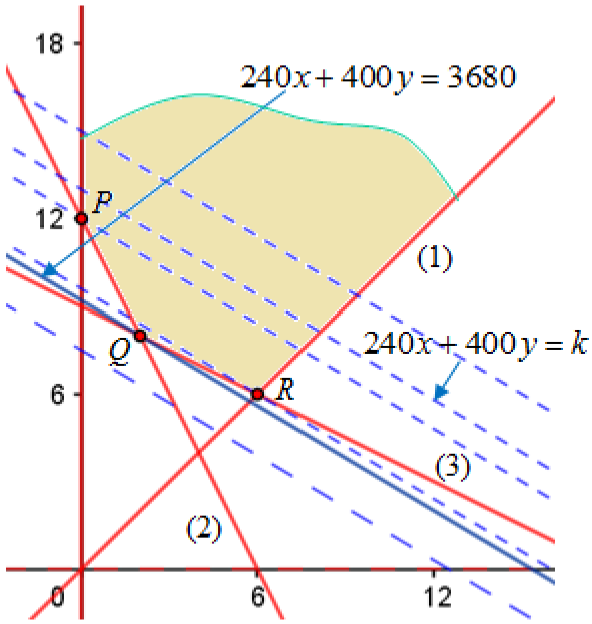
$y \le x$ (1)

$4x + 2y \ge 24$ (2)

$3x + 6y \ge 54$ (3)

$x \ge 0$; $y \ge 0$

La región factible es la sombreada en la figura adjunta. Se obtiene representando las rectas asociadas a las inecuaciones.



Las coordenadas de los vértices se calculan resolviendo los sistemas que se indican a continuación:

P: $\begin{cases} x = 0 \\ 4x + 2y = 24 \end{cases} \Rightarrow P = (0, 12);$

Q: $\begin{cases} 4x + 2y = 24 \\ 3x + 6y = 54 \end{cases} \Rightarrow Q = (2, 8);$

R: $\begin{cases} y = x \\ 3x + 6y = 54 \end{cases} \Rightarrow R = (6, 6).$

Se trata de una región abierta. La solución óptima, el coste mínimo, si existe, se da en alguno de los vértices anteriores. (No obstante podría comprobarse trazando las rectas de nivel, como haremos después).
El coste de alquiler de furgonetas en cada uno de esos vértices es:
En P, $C(0,12) = 240 \cdot 0 + 400 \cdot 12 = 4800$ €.
En Q, $C(2,8) = 240 \cdot 2 + 400 \cdot 8 = 3680$ €.
En R, $C(6,6) = 240 \cdot 6 + 400 \cdot 6 = 3840$ €.
El coste mínimo es de 3680 euros; se consigue alquilando 2 furgonetas del tipo A y 8 del tipo B.

Comprobación mediante las rectas de nivel.
Su ecuación es $240x + 400y = k$.
Puede trazarse una de ellas y trasladarla a izquierda y derecha: hacia la izquierda el nivel disminuye; hacia la derecha, aumenta. El nivel mínimo se obtiene en el punto de la región factible más a la izquierda que esté en contacto con esas rectas de nivel.
Como puede observarse ese punto es $Q = (2, 8)$.

3. (Propuesto en Selectividad 2010, País Vasco)
En la exposición de un establecimiento de material de oficina hay 400 unidades, entre lámparas, sillas y mesas, con un valor total de 15000 €. Si el valor de una lámpara es de 16 €, el de una silla 50 € y el de una mesa 80 €, y, además, hay tantas lámparas como sillas y mesas juntas, ¿cuántas lámparas, sillas y mesas hay en la exposición? (1,5 puntos)
<u>Solución</u>:
Sean *x*, *y*, *z* el número de lámparas, sillas y mesas, respectivamente.
Debe cumplirse que:

$$\begin{cases} x + y + z = 400 \\ 16x + 50y + 80z = 15000 \\ x = y + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 400 \\ 16x + 50y + 80z = 15000 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

Transformando el sistema:

$$\begin{matrix} \\ E2 - 50E1 \\ E3 + E1 \end{matrix} \begin{cases} x + y + z = 400 \\ -34x + 30z = -5000 \\ 2x = 400 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 200 + y + 60 = 400 \to y = 140 \\ -34 \cdot 200 + 30z = -5000 \to z = 60 \\ x = 200 \end{cases}$$

Hay 200 lámparas, 140 sillas y 60 mesas.

Alcalá de Henares, 22 de noviembre de 2017