EXAMEN DE MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS (II)
ÁLGEBRA, TEMAS 1 Y 2

1. (Castilla La Mancha, 2018)

Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -5 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$; $D=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) (1 punto) De los siguientes productos, explica razonadamente cuáles pueden realizarse y cuáles no:

$A \cdot B$; $A \cdot C$; $A \cdot D$; $C \cdot D$.

b) (1 punto) De los productos anteriores, realiza correctamente aquellos que den como resultado una matriz cuadrada.

2. a) (PAU Madrid, 1997) (1 punto) Calcula los valores del parámetro λ para que la inversa de la matriz $A=\begin{pmatrix} \lambda & -2 \\ 5 & -\lambda \end{pmatrix}$ coincida con su opuesta.

b) (PAU Madrid 2015) (1 punto) Se considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$. Calcúlese A^{15} e indíquese si la matriz A tiene inversa.

3. a) (0,5 puntos) Definición de rango de una matriz.

b) (1,5 puntos) Determina el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -a^2 \\ 0 & -3 & a \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, en función de los valores del parámetro a.

4. (La Rioja, EBAU 2018) Consideremos la matriz $A=\begin{pmatrix} 3a+2 & 2(a+1) \\ -(a+1) & -1 \end{pmatrix}$.

a) (1 punto) Determinar los valores de a para los que existe la matriz inversa A^{-1}.

b) (1,5 puntos) Tomando $a = 1$, determinar una matriz X tal que $A \cdot X = 3 \cdot A^t + A - 3 \cdot I_2$.

(Nota: A^t indica la matriz traspuesta de la matriz A e I_2 la matriz identidad de orden dos).

5. (1,5 puntos) Si A es una matriz de orden 3 tal que su determinantes vale 4: $|A|=4$, cuánto vale:

a) $|A^{-1}|$ b) $|3 \cdot A|$ c) $3 \cdot |A|$

Justifica las respuestas.

Alcalá de Henares, 17 de octubre de 2018.

Soluciones

1. (Castilla La Mancha, 2018)

Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 3 & 0 & 3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -5 & 0\\ -1 & -3\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}4\\ -4\\ 1\end{pmatrix}$; $D=\begin{pmatrix}0 & -1 & 3\end{pmatrix}$.

a) (1 punto) De los siguientes productos, explica razonadamente cuáles pueden realizarse y cuáles no:

$A\cdot B$; $A\cdot C$; $A\cdot D$; $C\cdot D$.

b) (1 punto) De los productos anteriores, realiza correctamente aquellos que den como resultado una matriz cuadrada.

Solución:

a) Dos matrices pueden multiplicarse cuando el número de columnas de la primera (la de la izquierda) coincida con el número de filas de la segunda.

En esquema:

$$A_{n\times p}\cdot B_{p\times m}=P_{n\times m}$$

$\to$ Se obtiene una matriz con las filas de la primera y las columnas de la segunda.

a) Para las matrices dadas:

$A_{2\times 3}\cdot B_{3\times 2}=P_{2\times 2}$, puede hacerse.

$A_{2\times 3}\cdot C_{3\times 1}=P_{2\times 1}$, puede hacerse.

$A_{2\times 3}\cdot D_{1\times 3}$, no puede hacerse.

$C_{3\times 1}\cdot D_{1\times 3}=P_{3\times 3}$, puede hacerse.

b) Son $A_{2\times 3}\cdot B_{3\times 2}=P_{2\times 2}$ y $C_{3\times 1}\cdot D_{1\times 3}=P_{3\times 3}$.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 3 & 0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 2\\ -5 & 0\\ -1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2-10+0 & -2+0+0\\ 6+0-3 & 6+0-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12 & -2\\ 3 & -3\end{pmatrix};$$

$$C\cdot D=\begin{pmatrix}4\\ -4\\ 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -4 & 12\\ 0 & 4 & -12\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}.$$

2. a) (PAU Madrid, 1997) (1 punto) Calcula los valores del parámetro λ para que la inversa de la matriz $A=\begin{pmatrix}\lambda & -2\\ 5 & -\lambda\end{pmatrix}$ coincida con su opuesta.

b) (PAU Madrid 2015) (1 punto) Se considera la matriz $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -6 & -2\end{pmatrix}$. Calcúlese A^{15} e indíquese si la matriz A tiene inversa.

Solución:

a) Si $A^{-1}=-A \Rightarrow A^{-1}\cdot A=-A\cdot A=I \Rightarrow \begin{pmatrix}-\lambda & 2\\ -5 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & -2\\ 5 & -\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -\lambda^2+10 & 0 \\ 0 & 10-\lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 10-\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 3.$$

b) $A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} = A \Rightarrow A^3 = A^2\cdot A = A\cdot A = A \ldots \Rightarrow A^{15} = A$.

La matriz A no tiene inversa, pues $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{vmatrix} = -6+6 = 0$.

3. a) (0,5 puntos) Definición de rango de una matriz.

b) (1,5 puntos) Determina el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -a^2 \\ 0 & -3 & a \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, en función de los valores del parámetro a.

Solución:

a) El rango de una matriz es el orden del mayor menor no nulo.

b) El determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -a^2 \\ 0 & -3 & a \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, desarrollado por la primera columna, vale:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -a^2 \\ 0 & -3 & a \\ -2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -12-2a-2\left(2a-3a^2\right) = 6\left(a^2-a-2\right) = 6(a+1)(a-2).$$

Por tanto:

- Si $a \neq -1$ y 2, $|A| \neq 0 \Rightarrow$ rango (A) = 3.
- Si $a = -1$ o $a = 2$, como el menor de orden 2, $M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow$ rango (A) = 2.

4. (La Rioja, EBAU 2018) Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 3a+2 & 2(a+1) \\ -(a+1) & -1 \end{pmatrix}$.

a) (1 punto) Determinar los valores de a para los que existe la matriz inversa A^{-1}.

b) (1,5 puntos) Tomando a = 1, determinar una matriz X tal que $A\cdot X = 3\cdot A^t + A - 3\cdot I_2$.

(Nota: A^t indica la matriz traspuesta de la matriz A e I_2 la matriz identidad de orden dos).

Solución:

a) Una matriz tiene inversa cuando su determinante es distinto de 0.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3a+2 & 2(a+1) \\ -(a+1) & -1 \end{vmatrix} = -3a-2+2(a+1)(a+1) = 2a^2+a.$$

Como $2a^2+a=0$ si a = 0 o $a = -\frac{1}{2}$, la matriz A tendrá inversa siempre que $a \neq 0$ y $a \neq -\frac{1}{2}$.

b) Para a = 1, la matriz es invertible: $|A|=3 \to A=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

De $A\cdot X=3\cdot A^t+A-3\cdot I_2 \Rightarrow A^{-1}\cdot(AX)=A^{-1}\cdot\left(3A^t+A-3I_2\right) \Rightarrow X=A^{-1}\cdot\left(3A^t+A-3I_2\right)$.

Cálculo de $3A^t+A-3I_2 = 3\cdot\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 17 & -2 \\ 10 & -7 \end{pmatrix}$.

Cálculo de A^{-1}.

$$A^{-1}=\frac{\left(Adj(A)\right)^t}{|A|}$$, siendo $Adj(A)$ la matriz de los adjuntos de A.

$$Adj(A)=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$X=A^{-1}\cdot\left(3A^t+A-3I_2\right)=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 17 & -2 \\ 10 & -7 \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -57 & 30 \\ 84 & -39 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 17 & 10 \\ 28 & -13 \end{pmatrix}.$$

5. (1,5 puntos) Si A es una matriz de orden 3 tal que su determinantes vale 4: $|A|=4$, cuánto vale:

a) $|A^{-1}|$ b) $|3\cdot A|$ c) $3\cdot|A|$

Justifica las respuestas.

Solución:

Se aplican las propiedades:

$|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$. Siendo A y B matrices cuadradas del mismo orden.

$|k\cdot A|=k^n|A|$, para A una matriz de orden n.

a) Como:

$$A\cdot A^{-1}=I \Rightarrow |A\cdot A^{-1}|=|I|=1 \Rightarrow |A|\cdot|A^{-1}|=1 \Rightarrow 4\cdot|A^{-1}|=1 \Rightarrow |A^{-1}|=\frac{1}{4}.$$

b) $|3\cdot A|=3^3|A|=3^3\cdot 4=108$.

c) $3\cdot|A|=3\cdot 4=12 \to$ es el producto de dos números.

Alcalá de Henares, 17 de octubre de 2018.