EXAMEN DE MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS (II) ÁLGEBRA, TEMAS 1 Y 2

1. (MA97). (1,5 puntos) Calcula los valores del parámetro λ para que la inversa de la matriz $A=\begin{pmatrix}\lambda & -2\\ 5 & -\lambda\end{pmatrix}$ coincida con su opuesta.

2. (CTJ17). Considera las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 5 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ m & n\end{pmatrix}$, siendo m y n números reales.

a) Comprueba que se cumple la igualdad $(A-B)\cdot(A+B)=A^2-B^2$. (1 punto)

b) Determina m y n de manera que las matrices B y C conmuten, es decir, $B\cdot C=C\cdot B$. (0,5 puntos)

3. (MAJ17). Considérense las matrices: $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -k\\ 1 & -2 & 1\\ k & 2 & -1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$

a) (1 punto) Discútase para qué valores del parámetro real k la matriz A tiene matriz inversa.

b) (1,5 puntos) Determínese para $k = 0$ la matriz X que verifica la ecuación $A\cdot X=B$.

4. (MAS17). Considérense las matrices: $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}$

a) (1 punto) Determínese la matriz C^{40}.

b) (1,5 puntos) Calcúlese la matriz X que verifica $X\cdot A+3B=C$.

5. a) (0,5 puntos) Definición de rango de una matriz.

b) (2 puntos) Sea la matriz $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & t & t\\ -1 & t & -1\end{pmatrix}$. Halla su rango en función del valor de t.

Alcalá de Henares, 25 de octubre de 2017

Examen de Matemáticas Aplicadas CCSS (Álgebra, Temas 1 y 2) Soluciones

1. (MA97). (1,5 puntos) Calcula los valores del parámetro λ para que la inversa de la matriz $A=\begin{pmatrix}\lambda & -2\\ 5 & -\lambda\end{pmatrix}$ coincida con su opuesta.

Solución:

Si $A^{-1}=-A \Rightarrow A^{-1}\cdot A=-A\cdot A=I \Rightarrow \begin{pmatrix}-\lambda & 2\\ -5 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & -2\\ 5 & -\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}-\lambda^2+10 & 0\\ 0 & 10-\lambda^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow 10-\lambda^2=1 \Rightarrow \lambda=\pm 3.$

2. (CTJ17). Considera las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 5 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ m & n\end{pmatrix}$, siendo m y n números reales.

a) Comprueba que se cumple la igualdad $(A-B)\cdot(A+B)=A^2-B^2$. (1 punto)

b) Determina m y n de manera que las matrices B y C conmuten, es decir, $B\cdot C=C\cdot B$. (0,5 puntos)

Solución:

a) Operando se tiene:

$$A-B=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 5 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 4 & 1\end{pmatrix};\quad A+B=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 5 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 6 & 1\end{pmatrix};$$

$$(A-B)\cdot(A+B)=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 4 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 6\\ 6 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25 & 10\\ 10 & 25\end{pmatrix}.$$

Por otra parte:

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 5 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 5\\ 5 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}26 & 10\\ 10 & 26\end{pmatrix};\quad B^2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix};$$

$$A^2-B^2=\begin{pmatrix}26 & 10\\ 10 & 26\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25 & 10\\ 10 & 25\end{pmatrix}.$$

Es evidente que $(A-B)\cdot(A+B)=A^2-B^2$.

b) Si $B\cdot C=C\cdot B \Rightarrow \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ m & n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ m & n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}m & n\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ n & m\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} m=-1\\ n=1\end{cases}.$

3. (MAJ17). Considérense las matrices: $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -k\\ 1 & -2 & 1\\ k & 2 & -1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$

a) (1 punto) Discútase para qué valores del parámetro real *k* la matriz *A* tiene matriz inversa.
b) (1,5 puntos) Determínese para *k* = 0 la matriz *X* que verifica la ecuación $A\cdot X=B$.

Solución:

a) Una matriz tiene inversa cuando su determinante es distinto de 0.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & -k\\ 1 & -2 & 1\\ k & 2 & -1\end{vmatrix}=-2(-1-k)-k(2+2k)=-2k^2+2.$$

Como $|A|=0$ si *k* = ±1, para esos valores de *k* las matriz no tendrá inversa.

b) $A\cdot X=B \Rightarrow X=A^{-1}B$.

La matriz inversa es $A^{-1}=\dfrac{(Adj(A))^t}{|A|}$, siendo $Adj(A)=(A_{ij})$ la matriz de los adjuntos de *A*.

Para *k* = 0: $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}$ y $|A|=2$.

Los adjuntos son:

$$A_{11}=+\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=0;\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix}=1;\quad A_{13}=+\begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}2 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}=2;\quad A_{22}=+\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-1;\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-2$$

$$A_{31}=+\begin{vmatrix}2 & 0\\ -2 & 1\end{vmatrix}=2;\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1;\quad A_{33}=+\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-4$$

Por tanto:

$$(A_{ij})=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 2 & -1 & -2\\ 2 & -1 & -4\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}0 & 2 & 2\\ 1 & -1 & -1\\ 2 & -2 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1/2 & -1/2 & -1/2\\ 1 & -1 & -2\end{pmatrix}.$$

Luego:

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1/2 & -1/2 & -1/2\\ 1 & -1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2 & 5\\ 1/2 & -1/2 & -2\\ 1 & -1 & -7\end{pmatrix}.$$

4. (MAS17). Considérense las matrices: $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}$

a) (1 punto) Determínese la matriz C^{40}.
b) (1,5 puntos) Calcúlese la matriz *X* que verifica $X\cdot A+3B=C$.
Solución:
a) Algunas potencias de *C* son:

$$C=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix};\ C^2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I \Rightarrow C^3=C^2\cdot C=I\cdot C=C;\ C^4=C^2=I.$$

En consecuencia, para todo *n* se cumple que $C^{2n}=I$ y $C^{2n-1}=C$.

Por tanto: $C^{40}=I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

b) $X\cdot A+3B=C \Rightarrow X\cdot A=C-3B \Rightarrow X=(C-3B)\cdot A^{-1}$, operación que puede hacerse, pues existe A^{-1} ya que $|A|=-1\neq 0$.

La matriz inversa es $A^{-1}=\dfrac{(Adj(A))^t}{|A|}$, siendo $Adj(A)=(A_{ij})$ la matriz de los adjuntos de *A*.

En este caso: $(A_{ij})=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\dfrac{1}{(-1)}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$.

Como $C-3B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 9\\ 6 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & -9\\ -3 & 4\end{pmatrix} \Rightarrow X=\begin{pmatrix}-4 & -9\\ -3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & 17\\ -1 & 2\end{pmatrix}$.

De otra forma (sin calcular la inversa de *A*):
Si la matriz $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, entonces, como $X\cdot A=C-3B$, se tendrá:

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & -9\\ -3 & 4\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}a-b & -2a+b\\ c-d & -2c+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & -9\\ -3 & 4\end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r}a-b=-4\\ -2a+b=-9\end{array}\right\}\\ \left.\begin{array}{r}c-d=-3\\ -2c+d=4\end{array}\right\}\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}a=13\\ b=17\\ c=-1\\ d=2\end{array}\right.$$

Luego, $X=\begin{pmatrix}13 & 17\\ -1 & 2\end{pmatrix}$.

5. a) (0,5 puntos) Definición de rango de una matriz.

b) (2 puntos) Sea la matriz $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & t & t\\ -1 & t & -1\end{pmatrix}$. Halla su rango en función del valor de *t*.

Solución:
a) Hay tres definiciones (equivalentes) de rango de una matriz:
1) Es el número de vectores fila linealmente independientes de esa matriz. (El rango de una matriz es el número de filas no nulas que tiene dicha matriz.)
2) Es el número de vectores columna linealmente independientes de esa matriz.

3) Es el orden del mayor menor no nulo de esa matriz.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & t & t \\ -1 & t & -1 \end{vmatrix} = -t - t^2 - t = -t(t+2) \Rightarrow$ Si $t \neq 0$ y $t \neq -2$, el determinantes es distinto de 0.

Por tanto:

- Si $t \neq 0$ y $t \neq -2 \Rightarrow$ su rango es 3.
- Si $t = 0$ la matriz es $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$: su rango es 2, pues la fila 1ª y 3ª son l.i.
- S $t = -2$ la matriz es $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. También con rango 2, pues el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$.

Alcalá de Henares, 26 de octubre de 2017