EXAMEN DE MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS (II) ÁLGEBRA (Recuperación)

1. a) (2 puntos) Halla la matriz X que satisface la ecuación:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

b) (1 punto) Calcula, si se puede, la inversa de la matriz X.

2. (EBAU, Murcia 2018) a) (1,7 puntos) Discutir el siguiente sistema en función del parámetro a:

$$\left.\begin{array}{c} x+2y-z=6 \\ y+z=1 \\ ax+y-2z=4 \end{array}\right\}$$

b) (0,8 puntos) Resolverlo para $a = 2$.

3. (Canarias, junio 2018) En un grupo hay 288 personas de entre 18 y 25 años clasificados como estudiantes, empleados y sin ocupación. Por cada cinco estudiantes hay tres empleados y los sin ocupación representan el 80 % del resto.

a) (1 punto) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.

b) (1 punto) ¿Cuántos estudiantes, empleados y sin ocupación hay?

4. (EvAU, Castilla y León, junio 18)

(2,5 puntos) Los trabajadores de un taller artesano elaboran collares y pulseras de bisutería. En la elaboración de un collar se tardan 2 horas, mientras que se emplea 1 hora en la elaboración de una pulsera. Los materiales de los que disponen les permiten fabricar como mucho 50 piezas (entre collares y pulseras) y el tiempo dedicado a su elaboración no puede exceder de 80 horas. Sabiendo que obtienen un beneficio de 5 euros por la venta de un collar y de 4 euros por la venta de una pulsera, utiliza técnicas de programación lineal para calcular el número de collares y pulseras que tienen que elaborar para que su beneficio sea máximo. ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?

Para subir nota.

Pregunta **3** del examen de recuperación. (Sube hasta 1 punto).

5. (Aragón, junio 2018) (Sube hasta 1,5 puntos).

Una empresa de carpintería tiene dos fábricas A y B en las que produce sillas, mesas y taburetes, y tiene que decidir el número de horas de trabajo en cada una de las dos fábricas para la semana próxima. Por cada hora de trabajo de la fábrica A, se producen 1 silla, 2 mesas y 4 taburetes, por cada hora de trabajo de la fábrica B se producen 4 sillas, 3 mesas y 2 taburetes. Durante la semana próxima la empresa tiene que producir, al menos, 80 sillas, 120 mesas y 96 taburetes. El coste por cada hora de trabajo de la fábrica A es de 1500 euros, mientras que el coste por cada hora de trabajo de la fábrica B es de 1000 euros. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar el número de horas que tiene que trabajar cada una de las fábricas para minimizar el coste. ¿Cuál es el valor de ese coste mínimo?

Alcalá de Henares, 5 de diciembre de 2018.

SOLUCIONES

1. a) (2 puntos) Halla la matriz *X* que satisface la ecuación:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

b) (1 punto) Calcula, si se puede, la inversa de la matriz *X*.

Solución:

Hay que resolver la ecuación $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Si escribe en la forma $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$.

→ Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Como $|A| = 6 \neq 0$, la matriz *A* es invertible, siendo $A^{-1} = \dfrac{(Adj(A))^t}{|A|}$.

La matriz de los adjuntos, $Adj(A) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$.

→ Operando en el lado derecho de la ecuación:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \\ 15 & 11 & 7 \end{pmatrix}.$$

Por tanto:

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \\ 15 & 11 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 11/3 & 7/3 \end{pmatrix}.$$

→ Matriz inversa de *X*:

Como $|X| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 11/3 & 7/3 \end{vmatrix} = 21 - \dfrac{28}{3} + \dfrac{22}{3} - 15 = 4$, se deduce que existe su inversa. Esa inversa es

$$X^{-1} = \frac{(Adj(X))^t}{|X|}.$$

La matriz de los adjuntos, $Adj(X) = \begin{pmatrix} 7 & -14/3 & -23/3 \\ -1 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow X^{-1} = \dfrac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -1 & -3 \\ -14/3 & 2 & 2 \\ -23/3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

2. (EBAU, Murcia 2018)
a) (1,7 puntos) Discutir el siguiente sistema en función del parámetro *a*:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y-z=6 \\ y+z=1 \\ ax+y-2z=4 \end{array}\right\}$$

(0,8 puntos) Resolverlo para *a* = 2.
<u>Solución</u>:

El sistema es: $\left.\begin{array}{r} x+2y-z=6 \\ y+z=1 \\ ax+y-2z=4 \end{array}\right\}$.

Sea *A* la matriz de coeficientes y *M* la matriz ampliada.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ a & 1 & -2 \end{pmatrix}; \quad M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Estudiando los rangos de ambas matrices se tiene:
Si r(*A*) = r(*M*) = 3, el sistema compatible determinado: solución única.
Si r(*A*) = r(*M*) < 3, el sistema compatible indeterminado: infinitas soluciones.
Si r (*A*) > r(*M*), el sistema incompatible.

El determinante de *A* vale $|A|=-3+3a$ $\to$ se anula cuando *a* = 1.

Con esto:
- Si $a\neq 1 \Rightarrow$ r(*A*) = 3 = r(*M*). El sistema será compatible determinado.
- Si $a = 1$ se tiene:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \quad M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$ y $|A|=0 \Rightarrow$ r(*A*) = 2. Por otra parte, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}=3-4\neq 0 \Rightarrow$ r(*M*) = 3.

Luego, si *a* = 1, el sistema es incompatible.

b) Para *a* = 2, el sistema es: $\left.\begin{array}{r} x+2y-z=6 \\ y+z=1 \\ 2x+y-2z=4 \end{array}\right\}$.

Puede resolverse por Gauss.

$$\left.\begin{array}{r} x+2y-z=6 \\ y+z=1 \\ 2x+y-2z=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \to \\ E3-2E1 \end{array} \left.\begin{array}{r} x+2y-z=6 \\ y+z=1 \\ -3y=-8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+\frac{16}{3}+\frac{5}{3}=6 \Rightarrow x=-1 \\ \frac{8}{3}+z=1 \Rightarrow z=-\frac{5}{3} \\ y=\frac{8}{3} \uparrow \end{array}\right. .$$

3. (Canarias, junio 2018)
En un grupo hay 288 personas de entre 18 y 25 años clasificados como estudiantes, empleados y sin ocupación. Por cada cinco estudiantes hay tres empleados y los sin ocupación representan el 80 % del resto.
a) (1 punto) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.
b) (1 punto) ¿Cuántos estudiantes, empleados y sin ocupación hay?
Solución:
a) Si el número de estudiantes, empleados y sin ocupación fuese, respectivamente, *x*, *y*, *z*, el sistema correspondiente será:

$x+y+z=288$ → hay un total de 288 personas;

$\dfrac{x}{y}=\dfrac{5}{3}$ → hay 5 estudiantes por cada 3 empleados;

$z=0,80(x+y)$ → los sin ocupación representan el 80 % del resto (que son los estudiantes más los empleados).

Se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=288 \\ 3x=5y \\ z=0,80(x+y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=288 \\ 3x-5y=0 \\ 8x+8y-10z=0 \end{cases}.$$

b) Puede resolverse mediante el método de Gauss:

$$\begin{cases} x+y+z=288 \\ 3x-5y=0 \\ 8x+8y-10z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E2-3E1 \\ E3-8E1 \end{matrix}\begin{cases} x+y+z=288 \\ -8y-3z=-864 \\ -18z=-2304 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+60+128=288 \Rightarrow x=100 \\ \uparrow -8y-384=-864 \Rightarrow y=60 \Rightarrow \\ \uparrow z=128 \end{cases} \begin{cases} x=100 \\ y=60 \\ z=128 \end{cases}.$$

Hay 100 estudiantes, 60 empleados y 128 sin ocupación.

4. (EvAU, Castilla y León, junio 18)
(2,5 puntos) Los trabajadores de un taller artesano elaboran collares y pulseras de bisutería. En la elaboración de un collar se tardan 2 horas, mientras que se emplea 1 hora en la elaboración de una pulsera. Los materiales de los que disponen les permiten fabricar como mucho 50 piezas (entre collares y pulseras) y el tiempo dedicado a su elaboración no puede exceder de 80 horas. Sabiendo que obtienen un beneficio de 5 euros por la venta de un collar y de 4 euros por la venta de una pulsera, utiliza técnicas de programación lineal para calcular el número de collares y pulseras que tienen que elaborar para que su beneficio sea máximo. ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?
Solución:
Si se fabrican *x* collares e *y* pulseras, el beneficio será $B(x,y)=5x+4y$.
Las restricciones son:

- De tiempo: $2x+y\le 80$ → se dispone de 80 horas como máximo.
- De cantidad: $x+y\le 50$ → pueden fabricarse un máximo de 50 piezas entre collares y pulseras.
- No negatividad: $x\ge 0$; $y\ge 0$.

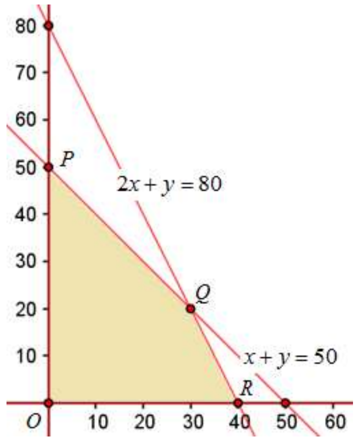
- Las restricciones $x\ge 0$ e $y\ge 0$ determinan los puntos del primer cuadrante del plano *XY*.

- La restricción $2x+y\le 80$ determina los puntos situados a la izquierda de la recta $2x+y=80$.

Dos de sus puntos son: (40, 0) y (0, 80).

- La restricción $x+y\le 50$ determina el semiplano situado a la izquierda de la recta $x+y=50$.

Dos puntos de la recta son: (50, 0) y (0, 50).



La región factible es la sombreada en la figura adjunta: polígono de vértices *O*, *P*, *Q* y *R*.
Los vértices *O*, *P* y *R* se han obtenido al dibujar las rectas.
El vértice *Q* es la solución del sistema:

$$\begin{cases} 2x+y=80 \\ x+y=50 \end{cases} \Rightarrow Q = (30,\ 20).$$

Como se trata de una región cerrada, el máximo de la función $B(x,y)=5x+4y$ se da en alguno de sus vértices.
El valor en cada uno de ellos es:
En *O*, $B(0,\ 0)=0$.
En *P*, $B(0,\ 50)=5\cdot 0+4\cdot 50=200$ €.
En *Q*, $B(30,\ 20)=5\cdot 30+4\cdot 20=230$ €.
En *R*, $B(40,\ 0)=5\cdot 40+4\cdot 0=200$ €.

El beneficio máximo asciende a 230 euros; se obtiene fabricando 30 collares y 20 pulseras.

Para subir nota.

5. (Aragón, junio 18) Una empresa de carpintería tiene dos fábricas A y B en las que produce sillas, mesas y taburetes, y tiene que decidir el número de horas de trabajo en cada una de las dos fábricas para la semana próxima. Por cada hora de trabajo de la fábrica A, se producen 1 silla, 2 mesas y 4 taburetes, por cada hora de trabajo de la fábrica B se producen 4 sillas, 3 mesas y 2 taburetes. Durante la semana próxima la empresa tiene que producir, al menos, 80 sillas, 120 mesas y 96 taburetes. El coste por cada hora de trabajo de la fábrica A es de 1500 euros, mientras que el coste por cada hora de trabajo de la fábrica B es de 1000 euros. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar el número de horas que tiene que trabajar cada una de las fábricas para minimizar el coste. ¿Cuál es el valor de ese coste mínimo?

Solución:

Con los datos del problema se forma la siguiente tabla:

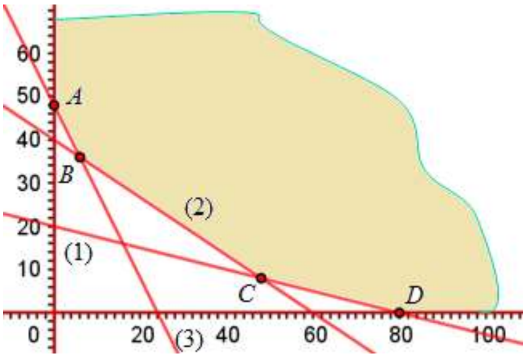
Fábrica	Horas	Sillas	Mesas	Taburetes	Coste
A	x	x	$2x$	$4x$	$1500x$
B	y	$4y$	$3y$	$2y$	$1000y$
Necesidades		80	120	96	

El objetivo es minimizar el coste: $C(x,y)=1500x+1000y$

Sujeto a:

$x+4y\geq 80$ (1); $2x+3y\geq 120$ (2);

$4x+2y\geq 96$ (3); $x\geq 0$; $y\geq 0$.



La región factible es la sombreada en la figura adjunta. Se obtiene representando las rectas asociadas a las inecuaciones.

Las coordenadas de los vértices se calculan resolviendo los sistemas que se indican a continuación:

A: $\begin{cases} x=0 \\ 4x+2y=96 \end{cases} \Rightarrow A = (0, 48)$;

B: $\begin{cases} 4x+2y=96 \\ 2x+3y=120 \end{cases} \Rightarrow B = (6, 36)$;

C: $\begin{cases} x+4y=80 \\ 2x+3y=120 \end{cases} \Rightarrow C = (48, 8)$; D: $\begin{cases} x+4y=80 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow D = (80,0)$.

Se trata de una región abierta. La solución óptima, el coste mínimo, si existe, se da en alguno de los vértices anteriores. (No obstante podría comprobarse trazando las rectas de nivel, como haremos después).

El coste en cada uno de esos vértices es:

En A, $C(0,48)=1500\cdot 0+1000\cdot 48=48000$ €. En B, $C(6,36)=1500\cdot 6+1000\cdot 36=45000$ €.

En C, $C(48,8)=1500\cdot 48+1000\cdot 8=80000$ €. En D, $C(80,0)=1500\cdot 80+1000\cdot 0=120000$ €.

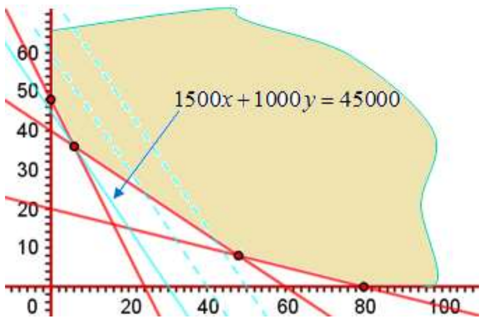
El coste mínimo es de 4500 euros; se consigue trabajando 6 horas en la fábrica A y 36 h en la B.

→ Comprobación mediante las rectas de nivel.

Su ecuación es $1500x+1000y=k$.

Puede trazarse una de ellas y trasladarla a izquierda y derecha. El nivel mínimo se obtiene en el punto de la región factible más a la izquierda que esté en contacto con esas rectas de nivel.

Como puede observarse, ese punto es B = (6, 36).



Alcalá de Henares, 5 de diciembre de 2018.