EXAMEN DE MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS (II) ÁLGEBRA (Recuperación)

1. (Selectividad, Cantabria 2016)
a) (2 puntos)

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 & a^2 \\ 0 & -2 & a \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, analiza su rango según los valores del parámetro *a*.

b) Sea el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} -x+3y=a^2 \\ \quad -2y=a \\ 3x+y=-2 \end{cases}$.

Basándose en los resultados obtenidos en el apartado anterior:
b1) (0,75 puntos) ¿Para qué valores de *a* tenemos un sistema compatible determinado?
b2) (0,75 puntos) ¿Para qué valores de *a* tenemos un sistema incompatible?
c) (0,5 puntos) Resuelve el sistema para $a = -2$, si es posible.

2. (Selectividad, Madrid 2016)
Considérense las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (2 puntos) Calcúlese el determinante de la matriz $A \cdot C \cdot C^T \cdot A^{-1}$.
b) (1 punto) Calcúlese la matriz $M = A \cdot B$. ¿Existe M^{-1}?
Nota: C^T denota la matriz traspuesta de la matriz C.
Observación: Si se aplican las propiedades de los determinantes no es necesario calcular la inversa de la matriz *A*.

3. (EvAU Madrid, junio 17)
Considérese la región del plano *S* definida por:

$$S=\{(x,y)\in \mathbf{R}^2 : x+6y\geq 6;\quad 5x-2y\geq -2;\quad x+3y\leq 20;\quad 2x-y\leq 12\}$$

a) (2 puntos) Represéntese gráficamente la región *S* y calcúlense las coordenadas de sus vértices.
b) (1 punto) Determínense los puntos en los que la función $f(x,y)=4x-3y$ alcanza sus valores máximo y mínimo en *S*, indicando el valor de $f(x,y)$ en dichos puntos.

Alcalá de Henares, 13 de diciembre de 2017

Examen de Matemáticas Aplicadas CCSS (Álgebra, Recuperación) **Soluciones**

1. (Selectividad, Cantabria 2016)

a) (2 puntos)

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & a^2\\ 0 & -2 & a\\ 3 & 1 & -2\end{pmatrix}$, analiza su rango según los valores del parámetro a.

b) Sea el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases}-x+3y=a^2\\ \quad -2y=a\\ 3x+y=-2\end{cases}$.

Basándose en los resultados obtenidos en el apartado anterior:

b1) (0,75 puntos) ¿Para qué valores de a tenemos un sistema compatible determinado?

b2) (0,75 puntos) ¿Para qué valores de a tenemos un sistema incompatible?

c) (0,5 puntos) Resuelve el sistema para a = –2, si es posible.

<u>Solución</u>:

a) El rango de una matriz es el orden del mayor menor no nulo.

El determinante de la matriz $A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & a^2\\ 0 & -2 & a\\ 3 & 1 & -2\end{pmatrix}$ es:

$$|A|=-(4-a)+3\cdot\left(3a+2a^2\right)=6a^2+10a-4.$$

Se anula cuando $6a^2+10a-4=0 \Rightarrow a=\dfrac{-10\pm\sqrt{100+96}}{12}=\dfrac{-10\pm 14}{12}=\begin{cases}-2\\ 1/3\end{cases}$.

Por tanto:

- Si $a\neq -2$ y 1/3, se tendrá que r(A) = 3, pues $|A|\neq 0$.
- Si a = –2 ó 1/3, r(A) = 2, pues el menor (de orden 2) $\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 0 & -2\end{vmatrix}=2\neq 0$.

b) El sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases}-x+3y=a^2\\ \quad -2y=a\\ 3x+y=-2\end{cases}$, será compatible cuando el rango de la matriz de coeficientes sea igual al rango de la matriz ampliada. Si ambos rangos coinciden con el número de incógnitas, que en este caso es 2, el sistema será determinado.

La matriz de coeficientes es $C=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 0 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$, que tiene rango 2; la ampliada es $A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & a^2\\ 0 & -2 & a\\ 3 & 1 & -2\end{pmatrix}$.

b1) El sistema será compatible determinado cuando ambos rangos sean iguales a 2. Esto sucede, como se ha visto en el apartado a), cuando a = –2 ó 1/3.

b2) Si $a\neq -2$ y 1/3, como r(A) = 3, el sistema será incompatible.

c) Para a = –2, el sistema es compatible determinado.

$$\begin{cases} -x+3y=4 \\ \quad -2y=-2 \\ 3x+y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+3y=4 \\ -2y=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x+3y=4 \to -x+3=4 \to x=-1 \\ \qquad y=1 \end{cases}.$$

2. (Selectividad, Madrid 2016)
Considérense las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (2 puntos) Calcúlese el determinante de la matriz $A \cdot C \cdot C^T \cdot A^{-1}$.
b) (1 punto) Calcúlese la matriz $M = A \cdot B$. ¿Existe M^{-1}?
Nota: C^T denota la matriz traspuesta de la matriz C.
Observación: Si se aplican las propiedades de los determinantes no es necesario calcular la inversa de la matriz A.
Solución:
a) Para calcular el determinante de la matriz $A \cdot C \cdot C^T \cdot A^{-1}$ no es necesario hallar los productos que se indican. Basta con aplicar las propiedades siguientes:
1) $|C|=|C^T|$.
2) Si P y Q son dos matrices multiplicables: $|P\cdot Q|=|P|\cdot|Q|$.
3) Una consecuencia de lo anterior es que: $|A\cdot A^{-1}|=|I|=1 \Rightarrow |A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$.

Por tanto, $|A\cdot C\cdot C^T\cdot A^{-1}|=|A|\cdot|C|\cdot|C^T|\cdot|A^{-1}|=|C|^2=4$, pues $|C|=\begin{vmatrix} 2 & 8 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=2$.

b) $M=A\cdot B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 16 & 11 \\ 37 & 26 \\ 33 & 21 \end{pmatrix}$.

Como la matriz M no es cuadrada no puede plantearse la existencia de su inversa. No existe.

Nota: Algunos alumnos "prefieren" hacer todos los cálculos en el apartado a).
Para ellos se dan los siguientes resultados:

$$|A|=-36; \quad A^{-1}=\frac{1}{36}\begin{pmatrix} 6 & -6 & 6 \\ -14 & 2 & 10 \\ 23 & 7 & -19 \end{pmatrix}; \quad A\cdot C\cdot C^T\cdot A^{-1}=\frac{1}{36}\begin{pmatrix} 1808 & -1472 & 1640 \\ 1217 & -1007 & 1139 \\ 2529 & -2079 & 2331 \end{pmatrix}.$$

Naturalmente,

$$|A\cdot C\cdot C^T\cdot A^{-1}|=\left|\frac{1}{36}\begin{pmatrix} 1808 & -1472 & 1640 \\ 1217 & -1007 & 1139 \\ 2529 & -2079 & 2331 \end{pmatrix}\right|=4. \text{ (Puede comprobarse).}$$

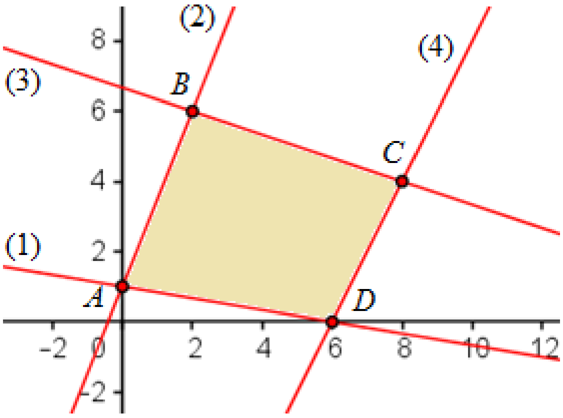
3. (EvAU Madrid, junio 17)
Considérese la región del plano S definida por:

$$S=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2: x+6y\geq 6;\quad 5x-2y\geq -2;\quad x+3y\leq 20;\quad 2x-y\leq 12\}$$

a) (2 puntos) Represéntese gráficamente la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.
b) (1 punto) Determínense los puntos en los que la función $f(x,y)=4x-3y$ alcanza sus valores máximo y mínimo en S, indicando el valor de $f(x,y)$ en dichos puntos.

Solución:
a) Se representan cada una de las rectas asociadas a las restricciones y se determina el semiplano solución en cada caso.

(1) $x+6y\geq 6\to x+6y=6$:
puntos (0, 1) y (6, 0);
semiplano de la derecha (superior).
(2) $5x-2y\geq -2\to 5x-2y=-2$:
puntos (0, 1) y (–2/5, 0);
semiplano de la derecha.
(3) $x+3y\leq 20\to x+3y=20$:
puntos (0, 20/3) y (20, 0);
semiplano de la izquierda (inferior).
(4) $2x-y\leq 12\to 2x-y=12$:
puntos (0, –12) y (6, 0);
semiplano de la izquierda.



Se obtiene la región sombreada en la figura adjunta.
Los vértices $A(0, 1)$ y $D(6, 0)$ se obtiene al hacer la representación gráfica. Son las soluciones de los sistemas $\begin{cases} x+6y=6 \\ 3x-2y=-2 \end{cases}$ y $\begin{cases} x+6y=6 \\ 2x-y=12 \end{cases}$, respectivamente.
Los otros dos se obtienen resolviendo los sistemas:

B: $\begin{cases} 5x-2y=-2 \\ x+3y=20 \end{cases}\to B(2, 6)$; C: $\begin{cases} x+3y=20 \\ 2x-y=12 \end{cases}\to C(8, 4)$.

b) Como la región es un polígono, la solución óptima (máxima o mínima) de cualquier función lineal se encuentra en alguno de sus vértices. Se determina evaluando la función en cada uno de los vértices. En este caso, para $f(x,y)=4x-3y$, se tiene:

En $A(0, 1)\to$ $f(0,1)=0-3=-3$.
En $B(2, 6)\to$ $f(2,6)=8-18=-10$.
En $C(8, 4)\to$ $f(8,4)=32-12=20$.
En $D(6, 0)\to$ $f(6,0)=24-0=24$.

Por tanto, el mínimo, que vale –10, lo alcanza en el punto $B(2, 6)$; el máximo, cuyo valor es 24, lo alcanza en el punto $D(6, 0)$.

Alcalá de Henares, 13 de diciembre de 2017