MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES
EXAMEN FINAL

1. (1,7 puntos) Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Halla la matriz *X* que verifique $A \cdot X - B = B \cdot X + A$.

2. (Madrid 18) Sea *S* la región del plano definida por:

$$x + y \le 50,\ \ 2x + y \le 80,\qquad x \ge 0,\qquad y \ge 0.$$

a) (0,8 puntos) Represéntese la región *S* y calcúlense las coordenadas de sus vértices.
b) (0,7 puntos) Obténgase el valor máximo de la función $f(x, y) = 5x + 4y$ en la región *S*, indicando el punto en el cual se alcanza dicho valor máximo.

3. Dada la función $f(x) = \dfrac{x-1}{(x-2)^2}$, se pide:

a) (0,5 puntos) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.
b) (0,5 puntos) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.
c) (0,5 puntos) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) (0,3 puntos) Los máximos y mínimos locales.

4. a) (0,5 puntos) Haz la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 2x - 3$.
b) (1 punto) Calcula el área encerrada entre la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 2x - 3$ y el eje *OX*.

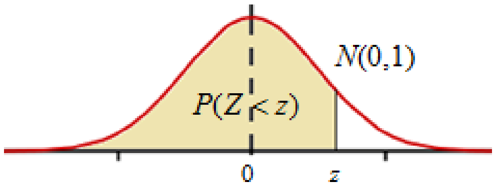
5. Los alumnos de una universidad que cursan los grados de Economía, Derecho y Matemáticas se distribuyen como sigue: el 35 % cursa Economía; el 38 %, Derecho; el 27 % restante estudia Matemáticas. Si cada curso finalizan sus estudios de grado un 18 % de los estudiantes de Economía, un 20 % de los de Derecho y un 15 % de los de Matemáticas:
a) (1 punto) ¿Qué probabilidad existe de que un estudiante elegido al azar finalice ese curso sus estudios?
b) (0,7 puntos) Sabiendo que un alumno elegido al azar ha terminado sus estudios, ¿cuál es la probabilidad de que haya cursado el grado de Economía?

6. (EvAU 18, Castilla y León)
Se quiere estimar el sueldo medio de un trabajador. Para ello se selecciona una muestra de 625 trabajadores y se obtiene un sueldo medio muestral de 1480 €. El sueldo de un trabajador es una variable aleatoria con distribución normal y desviación típica σ igual a 250 €.
a) (1 punto) Halla el intervalo de confianza del 90 % para el sueldo medio de un trabajador.
b) (0,8 puntos) Si se quiere que el error máximo de la estimación del sueldo medio de un trabajador sea de 10 €, con una confianza del 99 %, halla el tamaño mínimo de la muestra que se debe elegir.

Alcalá de Henares, 15 de mayo de 2019

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo *z*.



Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES
EXAMEN FINAL (Probabilidad)

1. Se truca una moneda de forma que la probabilidad de salir cara es doble que la de salir cruz.
a) (0,8 puntos) Si se tira al aire calcula la probabilidad de cada uno de los sucesos elementales.
b) (0,6 puntos) Si se tira dos veces, ¿cuánto vale la probabilidad de obtener dos caras?
c) (0,6 puntos) Si se tira tres veces, calcula la probabilidad de obtener dos cruces y una cara.

2. Se tienen dos sucesos aleatorios A y B y se conocen las probabilidades:
$P(A) = 0,4$; $P(B) = 0,5$ y $P(A \cup B) = 0,7$.
a) (0,8 puntos) ¿Son los sucesos A y B incompatibles? Razona la respuesta.
b) (0,6 puntos) ¿Son sucesos independientes? Razona la respuesta.
c) (0,6 puntos) Halla las probabilidades: $P\left(\overline{A \cap B}\right)$ y $P\left(B - A\right)$.

3. Los alumnos de una universidad que cursan los grados de Economía, Derecho y Matemáticas se distribuyen como sigue: el 35 % cursa Economía; el 38 %, Derecho; el 27 % restante estudia Matemáticas. Si cada curso finalizan sus estudios de grado un 18 % de los estudiantes de Economía, un 20 % de los de Derecho y un 15 % de los de Matemáticas:
a) (1,2 puntos) ¿Qué probabilidad existe de que un estudiante elegido al azar finalice ese curso sus estudios?
b) (0,8 puntos) Sabiendo que un alumno elegido al azar ha terminado sus estudios, ¿cuál es la probabilidad de que haya cursado el grado de Economía?

4. (EvAU 18, Castilla y León)
Se quiere estimar el sueldo medio de un trabajador. Para ello se selecciona una muestra de 625 trabajadores y se obtiene un sueldo medio muestral de 1480 €. El sueldo de un trabajador es una variable aleatoria con distribución normal y desviación típica σ igual a 250 €.
a) (1,2 puntos) Halla el intervalo de confianza del 90 % para el sueldo medio de un trabajador.
b) (0,8 puntos) Si se quiere que el error máximo de la estimación del sueldo medio de un trabajador sea de 10 €, con una confianza del 99 %, halla el tamaño mínimo de la muestra que se debe elegir.

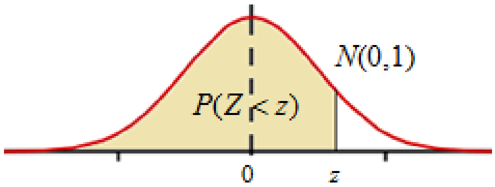
5. (EvAU 18, País Vasco) En un gabinete médico se realiza una prueba de reacción a señales luminosas para medir los reflejos de los pacientes. Los resultados en milisegundos (ms) se ajustan a una distribución normal $N(\mu, \sigma)$, donde $\sigma = 300$ ms. A partir de una muestra aleatoria simple, se obtiene un intervalo de confianza (740, 820) para la media μ, con nivel de confianza $n_c = 95$ %. Se pide:
a) (1,2 puntos) La media muestral y el tamaño de la muestra elegida.
b) (0,8 puntos) El error cometido en el cálculo de μ, si ahora tomamos una muestra aleatoria simple de tamaño 64 y $n_c = 86$ %.

5. (Alternativo) (Selectividad, Canarias 2014). En una zona escolar, para una muestra de 200 alumnos, 30 son repetidores.
a) (1 punto) Construir un intervalo de confianza con un nivel del 95 %, para estimar la proporción de alumnos repetidores.
b) (1 punto) Si se ignoran los datos iniciales y con un nivel de confianza del 90 %, ¿cuál es el tamaño mínimo muestral para estimar la proporción de alumnos repetidores con un error máximo del 2 %?

Alcalá de Henares, 15 de mayo de 2019

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo *z*.



Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

Soluciones: Examen final

1. (1,7 puntos) Sean las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Halla la matriz X que verifique $A\cdot X - B = B\cdot X + A$.

Solución:

$$A\cdot X - B = B\cdot X + A \Rightarrow A\cdot X - B\cdot X = A+B \Rightarrow (A-B)\cdot X = A+B.$$

Como

$$A+B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } A-B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix},$$

suponiendo que $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se tendrá:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ -3a & -3b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a=-1/3 \\ b=-2/3 \\ a-c=3 \\ b-d=3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{3}-c=3 \Rightarrow c=-\frac{1}{3}-3=-\frac{10}{3};\ -\frac{2}{3}-d=3 \Rightarrow c=-\frac{2}{3}-3=-\frac{11}{3}.$$

Por tanto, la matriz $X=\begin{pmatrix} -1/3 & -2/3 \\ -10/3 & -11/3 \end{pmatrix} \Rightarrow X=-\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}$.

2. (Madrid 18) Sea S la región del plano definida por:

$$x+y\le 50,\quad 2x+y\le 80,\qquad x\ge 0,\qquad y\ge 0.$$

a) (0,8 puntos) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) (0,7 puntos) Obténgase el valor máximo de la función $f(x,y)=5x+4y$ en la región S, indicando el punto en el cual se alcanza dicho valor máximo.

Solución:

a) Se representan cada una de las rectas asociadas a las restricciones y se determina el semiplano solución en cada caso.

(1) $x+y\le 50 \to x+y=50$:

puntos (0, 50) y (50, 0); semiplano de la izquierda.

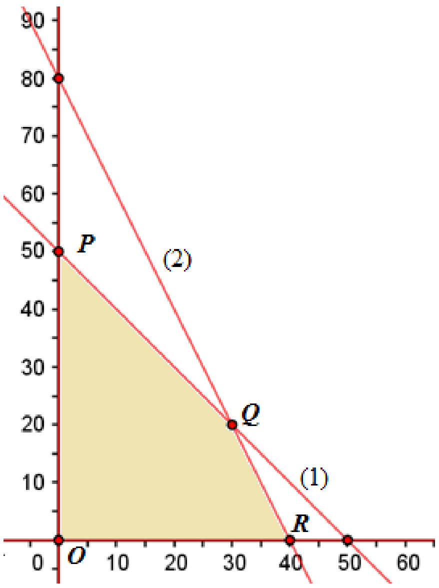
(2) $2x+y\le 80 \to 2x+y=80$:

puntos (0, 80) y (40, 0); semiplano de la izquierda.

$x\ge 0$ → puntos situados a la derecha del eje OY.

$y\ge 0$ → puntos situados por encima del eje OX.

Se obtiene la región sombreada en la figura adjunta.



Los vértices $O(0, 0)$, $P(0, 50)$ y $R(40, 0)$ se obtienen al dibujar las rectas (son los cortes de las estricciones con los ejes cartesianos).

El punto $Q(30, 20)$ es solución del sistema $\begin{cases} x+y=50 \\ 2x+y=80 \end{cases}$.

b) Como la región es cerrada, la solución óptima (máxima o mínima) de cualquier función lineal se encuentra en alguno de sus vértices. Se determina evaluando la función en cada uno de los vértices. En este caso, para $f(x, y) = 5x + 4y$, se tiene:

En $O(0, 0) \to f(0,0) = 0$.

En $P(0, 50) \to f(0,\ 50) = 5{\cdot}0 + 4{\cdot}50 = 200$.

En $Q(30, 20) \to f(30,\ 20) = 5{\cdot}30 + 4{\cdot}20 = 230$.

En $R(40, 0) \to f(40,\ 0) = 5{\cdot}40 + 4{\cdot}0 = 200$.

Por tanto, el máximo, que vale 230, se alcanza en el punto $Q(30, 20)$.

3. Dada la función $f(x) = \dfrac{x-1}{(x-2)^2}$, se pide:

a) (0,5 puntos) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.
b) (0,5 puntos) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.
c) (0,5 puntos) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) (0,3 puntos) Los máximos y mínimos locales.

Solución:

a) Dominio: **R** – {2}.

Corte con los ejes:

Con el eje *OY*: se hace $x = 0 \to$ punto $\left(0, -\dfrac{1}{4}\right)$.

Con el eje *OX*: se hace $y = 0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{x-1}{(x-2)^2} = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \to$ punto (1, 0).

b) Asíntotas:

Hay una asíntota vertical en $x = 2$, ya que: $\lim_{x\to 2} \dfrac{x-1}{(x-2)^2} = \dfrac{1}{0} = +\infty$.

(Tanto por la izquierda de $x = 2$, como por la derecha, la función tenderá a $+\infty$, pues el denominador siempre es positivo).

También tiene una asíntota horizontal, la recta $y = 0$, pues: $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x-1}{(x-2)^2} = 0$.

Hacia $-\infty$, la función es negativa: se pega a la asíntota (al eje *OX*) por debajo.
Hacia $+\infty$, la función es positiva: se pega a la asíntota (al eje *OX*) por encima.

c) Derivando:

$$f'(x) = \frac{1{\cdot}(x-2)^2 - (x-1){\cdot}2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{1{\cdot}(x-2) - (x-1){\cdot}2}{(x-2)^3} = \frac{-x}{(x-2)^3} \to f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

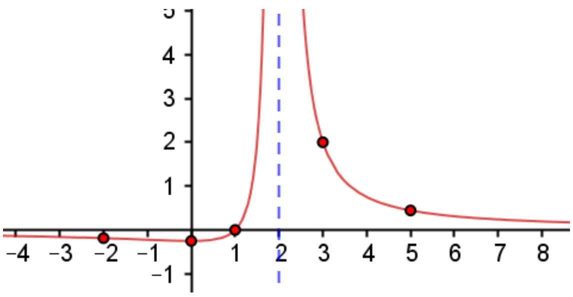
Luego:

Si $x < 0$, como $f'(x) < 0 \Rightarrow$ la función es decreciente.

Si $0 < x < 2$, $f'(x) > 0 \Rightarrow$ la función es creciente.

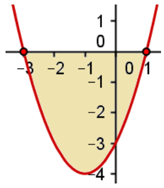
Si $x > 2$, $f'(x) < 0 \Rightarrow$ la función es decreciente.

d) Como la función decrece a la izquierda de $x = 0$ y crece a su derecha, en $x = 0$ se tiene un mínimo.



$\rightarrow$ Aunque no se pide, su gráfica es la adjunta.
Algunos puntos de la gráfica de la función son:
(0, –1/4), mínimo; (1, 0); (–2, –3/16);
(3, 2); (5, 4/9).

4. a) (0,5 puntos) Haz la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 2x - 3$.
b) (1 punto) Calcula el área encerrada entre la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 2x - 3$ y el eje *OX*.
Solución:
La función $f(x) = x^2 + 2x - 3$ corta al eje *OX* en las soluciones de la ecuación $x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1$ y $x = -3$.
Su gráfica es la adjunta.



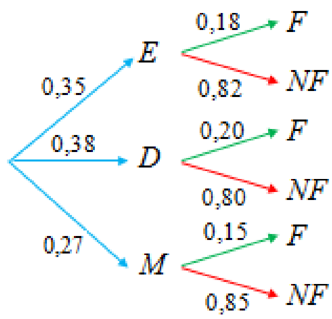
Como el recinto está por debajo del eje *OX*, su área viene dada por:

$$A = -\int_{-3}^{1}\left(x^2 + 2x - 3\right)dx = \left[-\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right]_{-3}^{1} = -\frac{1}{3} - 1 + 3 - (9 - 9 - 9) = \frac{32}{3} \text{ u}^2.$$

También podría utilizarse el valor absoluto. Esto es:

$$A = \left|\int_{-3}^{1}\left(x^2 + 2x - 3\right)dx\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x\right]_{-3}^{1}\right| = \left|\frac{1}{3} + 1 - 3 - (-9 + 9 + 9)\right| = \frac{32}{3} \text{ u}^2.$$

5. Los alumnos de una universidad que cursan los grados de Economía, Derecho y Matemáticas se distribuyen como sigue: el 35 % cursa Economía; el 38 %, Derecho; el 27 % restante estudia Matemáticas. Si cada curso finalizan sus estudios de grado un 18 % de los estudiantes de Economía, un 20 % de los de Derecho y un 15 % de los de Matemáticas:
a) (1 punto) ¿Qué probabilidad existe de que un estudiante elegido al azar finalice ese curso sus estudios?
b) (0,7 puntos) Sabiendo que un alumno elegido al azar ha terminado sus estudios, ¿cuál es la probabilidad de que haya cursado el grado de Economía?
Solución:
$\rightarrow$ Se puede construir el diagrama adjunto, siendo *E*, *D* y *M* los sucesos ser estudiante de Economía, Derecho y Matemáticas, respectivamente; *F* y *NF* son los sucesos finalizar o no ese curso.



a) Con esto, la probabilidad de que un estudiante elegido al azar finalice sus estudios, *P*(*F*), es:

$$P(F) = P(E)P(F/E) + P(D)P(F/D) + P(M)P(F/M)$$

Esto es:

$$P(F) = 0,35 \cdot 0,18 + 0,38 \cdot 0,20 + 0,27 \cdot 0,15 = 0,1795.$$

b) $P(E/F) = \dfrac{P(E)P(F/E)}{P(F)} = \dfrac{0,35 \cdot 0,18}{0,1795} = \dfrac{630}{1795} \approx 0,351$.

Esto es, el 35,1 % de los estudiantes que han terminado son de Economía.

6. (Castilla y León, 18)
Se quiere estimar el sueldo medio de un trabajador. Para ello se selecciona una muestra de 625 trabajadores y se obtiene un sueldo medio muestral de 1480 €. El sueldo de un trabajador es una variable aleatoria con distribución normal y desviación típica σ igual a 250 €.
a) (1 punto) Halla el intervalo de confianza del 90 % para el sueldo medio de un trabajador.
b) (0,8 puntos) Si se quiere que el error máximo de la estimación del sueldo medio de un trabajador sea de 10 €, con una confianza del 99 %, halla el tamaño mínimo de la muestra que se debe elegir.
<u>Solución</u>:
a) El intervalo de confianza de la media poblacional, para las muestras de tamaño *n* es:

$$IC = \left(\bar{x} - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \ \bar{x} + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right),$$

Siendo: $\bar{x}$, la media de la muestra; σ, la desviación típica de la población; y $Z_{\alpha/2}$, el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza de 1 − α.

Para $\bar{x}$ = 1480, σ = 250, *n* = 625 y, para el 90 % de confianza (1 − α/2 = 0,9500), $Z_{\alpha/2}$ = 1,645, se tiene:

$$\left(1480 - 1,645 \cdot \frac{250}{\sqrt{625}},\ \ 1480 + 1,645 \cdot \frac{250}{\sqrt{625}}\right) =$$

= (1480 – 16,45, 1480 + 16,45) = (1463,55, 1496,45).

b) El error máximo viene dado por $E = Z_{\alpha/2} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Si se quiere que $E \le 10$, con una confianza del 99 % ($Z_{\alpha/2}$ = 2,575), se tendrá:

$$2,575 \cdot \frac{250}{\sqrt{n}} \le 10 \Rightarrow \sqrt{n} \ge 64,375 \Rightarrow n \ge 4144,14.$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser *n* = 4145.

Alcalá de Henares, 15 de mayo de 2019

Soluciones Probabilidad

1. Se truca una moneda de forma que la probabilidad de salir cara es doble que la de salir cruz.
a) (0,8 puntos) Si se tira al aire calcula la probabilidad de cada uno de los sucesos elementales.
b) (0,6 puntos) Si se tira dos veces, ¿cuánto vale la probabilidad de obtener dos caras?
c) (0,6 puntos) Si se tira tres veces, calcula la probabilidad de obtener dos cruces y una cara.

Solución:

a) Sea C el suceso cara y X el suceso cruz.
Se sabe que $P(C) = 2 \cdot P(X)$.

Como $P(C) + P(X) = 1 \Rightarrow 2P(X) + P(X) = 1 \Rightarrow P(X) = \frac{1}{3} \Rightarrow P(C) = \frac{2}{3}$.

a) Como los sucesos son independientes,

$$P(CC) = P(C) \cdot P(C) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$$

b) Por lo mismo, y como el suceso "2 cruces y 1 cara" es {XXC, XCX, CXX}, se tiene:

$$P(2X, 1C) = 3 \cdot P(X) \cdot P(X) \cdot P(C) = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

2. Se tienen dos sucesos aleatorios A y B y se conocen las probabilidades:

$P(A) = 0,4$; $P(B) = 0,5$ y $P(A \cup B) = 0,7$.

a) (0,8 puntos) ¿Son los sucesos A y B incompatibles? Razona la respuesta.
b) (0,6 puntos) ¿Son sucesos independientes? Razona la respuesta.
c) (0,6 puntos) Halla las probabilidades: $P\left(\overline{A \cap B}\right)$ y $P\left(B - A\right)$.

Solución:

a) Dos sucesos A y B son incompatibles cuando $P(A \cap B) = 0$.
Como

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B).$$

En este caso:

$P(A \cap B) = 0,4 + 0,5 - 0,7 = 0,2 \neq 0 \Rightarrow$ A y B no son incompatibles.

b) Dos sucesos A y B son independientes cuando $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
Como

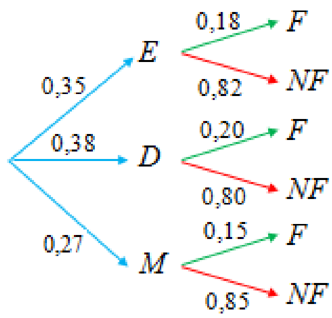
$P(A \cap B) = 0,2$ y $P(A) \cdot P(B) = 0,4 \cdot 0,5 = 0,2 \Rightarrow$ los sucesos son independientes.

c) $P\left(\overline{A \cap B}\right) = 1 - P\left(A \cap B\right) = 12 - 0,2 = 0,8$.

$P\left(B - A\right) = P(B) - P\left(A \cap B\right) = 0,5 - 0,2 = 0,3$.

3. Los alumnos de una universidad que cursan los grados de Economía, Derecho y Matemáticas se distribuyen como sigue: el 35 % cursa Economía; el 38 %, Derecho; el 27 % restante estudia Matemáticas. Si cada curso finalizan sus estudios de grado un 18 % de los estudiantes de Economía, un 20 % de los de Derecho y un 15 % de los de Matemáticas:
a) (0,8 puntos) ¿qué probabilidad existe de que un estudiante elegido al azar finalice ese curso sus estudios?

b) (0,7 puntos) Sabiendo que un alumno elegido al azar ha terminado sus estudios, ¿cuál es la probabilidad de que haya cursado el grado de Economía?
Solución:
→ Se puede construir el diagrama adjunto, siendo *E*, *D* y *M* los sucesos ser estudiante de Economía, Derecho y Matemáticas, respectivamente; *F* y *NF* son los sucesos finalizar o no ese curso.



a) Con esto, la probabilidad de que un estudiante elegido al azar finalice sus estudios, *P*(*F*), es:

$$P(F) = P(E)P(F/E) + P(D)P(F/D) + P(M)P(F/M)$$

Esto es:

$$P(F) = 0,35 \cdot 0,18 + 0,38 \cdot 0,20 + 0,27 \cdot 0,15 = 0,1795.$$

b) $P(E/F) = \dfrac{P(E)P(F/E)}{P(F)} = \dfrac{0,35 \cdot 0,18}{0,1795} = \dfrac{630}{1795} \approx 0,351.$

Esto es, el 35,1 % de los estudiantes que han terminado son de Economía.

4. (EvAU 18, Castilla y León)
Se quiere estimar el sueldo medio de un trabajador. Para ello se selecciona una muestra de 625 trabajadores y se obtiene un sueldo medio muestral de 1480 €. El sueldo de un trabajador es una variable aleatoria con distribución normal y desviación típica σ igual a 250 €.
a) (1,2 puntos) Halla el intervalo de confianza del 90 % para el sueldo medio de un trabajador.
b) (0,8 puntos) Si se quiere que el error máximo de la estimación del sueldo medio de un trabajador sea de 10 €, con una confianza del 99 %, halla el tamaño mínimo de la muestra que se debe elegir.

5. (EvAU 18, País Vasco)
En un gabinete médico se realiza una prueba de reacción a señales luminosas para medir los reflejos de los pacientes. Los resultados en milisegundos (ms) se ajustan a una distribución normal *N*(μ, σ), donde σ = 300 ms. A partir de una muestra aleatoria simple, se obtiene un intervalo de confianza (740, 820) para la media μ, con n_c = 95 % ($n_c \equiv$ nivel de confianza). Se pide:
a) (1,2 puntos) La media muestral y el tamaño de la muestra elegida.
b) (0,8 puntos) El error cometido en el cálculo de μ, si ahora tomamos una muestra aleatoria simple de tamaño 64 y n_c = 86 %.
Solución:
El intervalo de confianza de la media poblacional, para las muestras de tamaño *n* es:

$$IC = \left(\bar{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right),$$

siendo: $\bar{x}$, la media de la muestra; σ, la desviación típica de la población; y $Z_{\alpha/2}$, el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza de 1 − α.

→ La media muestral es el punto medio del intervalo, y su amplitud es $2 \cdot Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

a) Si se sabe que el intervalo de confianza es (740, 820), siendo σ = 300 ms y el nivel de confianza n_c = 95 %, entonces se deduce que:

su media será $\bar{x} = \dfrac{740 + 820}{2} = 780$.

El tamaño de la muestra se deduce de que $2\cdot Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=820-740 \Rightarrow Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=40$.

Como σ = 300 y, para el 95 %, $Z_{\alpha/2}$= 1,96, se tendrá:

$$1,96\cdot\frac{300}{\sqrt{n}}=40 \Rightarrow n=\left(\frac{1,96\cdot 300}{40}\right)^2=216,09.$$

El tamaño muestral habrá sido de 216 (o 217 si se quiere mayor rigor).

b) El error cometido en el cálculo de μ, si ahora tomamos una muestra aleatoria simple de tamaño 64 y n_c = 86 % ($Z_{\alpha/2}$ = 1,475, "interpolando").

Como el error cometido está acotado por $E=Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Luego:

$$E=1,475\cdot\frac{300}{\sqrt{64}}\approx 55,3.$$

5. (Alternativo) (Selectividad, Canarias 2014). En una zona escolar, para una muestra de 200 alumnos, 30 son repetidores.
a) (1 punto) Construir un intervalo de confianza con un nivel del 95 %, para estimar la proporción de alumnos repetidores.
b) (1 punto) Si se ignoran los datos iniciales y con un nivel de confianza del 90 %, ¿cuál es el tamaño mínimo muestral para estimar la proporción de alumnos repetidores con un error máximo del 2 %?
Solución:
a) El intervalo de confianza para la proporción *p* de la población es:

$$IC=\left(\hat{p}-Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \hat{p}+Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right),$$

siendo: $\hat{p}$ la proporción de la muestra; *n*, el tamaño muestral.

La proporción de repetidores es: $\hat{p}=\dfrac{30}{200}=0,15$.

Para el 95 % de confianza, $Z_{\alpha/2}$= 1,96; $\hat{p}$ = 0,15, $\hat{q}$ = 0,85; y *n* = 200, el intervalo de confianza para la proporción *p* de la población es:

$$IC=\left(0,15-1,96\cdot\sqrt{\frac{0,15\cdot 0,85}{200}},\ 0,15+1,96\cdot\sqrt{\frac{0,15\cdot 0,85}{200}}\right)=$$

= (0,15 – 0,025, 0,15 + 0,025) = (0,125, 0,175).

b) Si se ignoran los datos anteriores, la mayor garantía se obtiene partiendo que de *p* = *q* = 0,50.

Como el error viene dado por $E=Z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{p\cdot q}{n}}$, si se desea que *E* < 0,02, como para el 90%, $Z_{\alpha/2}$ = 1,645 $\Rightarrow$ $E=1,645\cdot\sqrt{\dfrac{0,5\cdot 0,5}{n}}<0,02 \Rightarrow n>\left(\dfrac{1,645\cdot 0,5}{0,02}\right)^2=260$.

Debe tomarse una muestra de, al menos, 260 alumnos.

Alcalá de Henares, 15 de mayo de 2019